

# Approssimazione Numerica delle DAE

(Metodi Matematici e Calcolo per Ingegneria)

Enrico Bertolazzi

DIMS – Università di Trento

anno accademico 2007/2008



## Outline

- 1 Origine delle DAE
- 2 Stabilizzazione alla Baumgarte



# Origine delle DAE

- $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  vettore delle coordinate (dipendenti).
- $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ : energia cinetica.
- $V(\mathbf{q})$ : energia potenziale.
- $\mathbf{Q}_{ex}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$ : forze esterne generalizzate.
- $\Phi(\mathbf{q}, t) \in \mathbb{R}^m$ : equazioni dei vincoli.
- $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - V(\mathbf{q})$ : Lagrangiana.
- Equazioni del moto

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \Phi(\mathbf{q}, t)}{\partial \mathbf{q}}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}_{ex}(\mathbf{q}) \quad (*)$$

- $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$  sono i moltiplicatori di Lagrange associati ai vincoli.



Normalmente l'energia cinetica prende la forma:

$$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$$

cosicché la (\*) diventa

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}_{ex} + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

Il sistema di equazioni differenziali da risolvere diventa quindi

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, t)^T \boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ \Phi(\mathbf{q}, t) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

che è composto parte da equazione differenziale e parte da vincolo algebrico (cioè è un DAE=**Differential Algebraic Equation**)



Come fare per risolvere numericamente questo sistema ?

$$M(q)\ddot{q} + \Phi_q(q, t)^T \lambda = Q(q, \dot{q}) \quad (\text{DAE.1})$$

$$\Phi(q, t) = \mathbf{0} \quad (\text{DAE.2})$$

ad esempio se sviluppo la soluzione con Taylor

$$\dot{q}(t + \Delta t) = \dot{q}(t) + \ddot{q}(t)\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2)$$

$$q(t + \Delta t) = q(t) + \dot{q}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{q}(t)\Delta t^2 + \mathcal{O}(\Delta t^3)$$

trascurando i termini  $\mathcal{O}(\Delta t^2)$  e  $\mathcal{O}(\Delta t^3)$  posso costruire il seguente schema numerico

$$\dot{q}_{k+1} = \dot{q}_k + \ddot{q}_k \Delta t$$

$$q_{k+1} = q_k + \dot{q}_k \Delta t + \frac{1}{2}\ddot{q}_k \Delta t^2$$

per poterlo definire devo in qualche modo calcolare  $\ddot{q}_k$



Se la matrice di massa  $M(q)$  è non singolare usando la equazione (DAE.1) posso ricavare  $\ddot{q}$ :

$$\ddot{q} = M(q)^{-1} [Q(q, \dot{q}) - \Phi_q(q, t)^T \lambda]$$

ma per poter chiudere il giro devo in qualche modo determinare  $\lambda$ . Di fatto devo determinare  $n$  valori per  $\ddot{q}$  e  $m$  valori per  $\lambda$ . In (DAE.1) ci sono  $n$  equazioni differenziali mentre (DAE.2) sono  $m$  equazioni algebriche. Quindi nella conta delle equazioni abbiamo abbastanza relazioni per determinare  $\ddot{q}$  e  $\lambda$ . Purtroppo l'equazione (DAE.2) ma contiene solo  $q$ . Come fare ?

**Soluzione:** se derivo l'equazione (DAE.2) due volte posso ottenere una equazione contenente  $\ddot{q}$



Derivando una prima volta la  $k$  esima componente di (DAE.2) otteniamo

$$\frac{d}{dt} \Phi_k(\mathbf{q}(t), t) = \frac{\partial \Phi_k(\mathbf{q}(t), t)}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_k(\mathbf{q}(t), t)}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}}(t)$$

e derivando una seconda volta otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \Phi_k(\mathbf{q}(t), t) &= \frac{\partial^2 \Phi_k(\mathbf{q}(t), t)}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 \Phi_k(\mathbf{q}(t), t)}{\partial t \partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}}(t) \\ &+ \dot{\mathbf{q}}(t)^T \frac{\partial^2 \Phi_k(\mathbf{q}(t), t)}{\partial \mathbf{q}^2} \dot{\mathbf{q}}(t) + \frac{\partial \Phi_k(\mathbf{q}(t), t)}{\partial \mathbf{q}} \ddot{\mathbf{q}}(t) \end{aligned}$$

usando una notazione più compatta omettendo gli argomenti delle funzioni otteniamo:

$$\mathbf{0} = \Phi_{tt} + 2\Phi_{tq}\dot{\mathbf{q}} + \Phi_{qq}\dot{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} + \Phi_q\ddot{\mathbf{q}} \quad (\text{DAE.2''})$$

dove  $(\Phi_{qq}\dot{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}})_k = \dot{\mathbf{q}}^T (\Phi_k)_{qq} \dot{\mathbf{q}}$ .



Unendo la (DAE.1) con la (DAE.2'') otteniamo

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \Phi_q(\mathbf{q}, t)^T \lambda = Q(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (\text{DAE.1})$$

$$\Phi_q(\mathbf{q}, t)\ddot{\mathbf{q}} = c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (\text{DAE.2''})$$

dove

$$c_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = -(\Phi_k)_{tt} - 2(\Phi_k)_{tq}\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^T (\Phi_k)_{qq} \dot{\mathbf{q}}$$

Questo può essere riscritto in forma matriciale come segue

$$\begin{pmatrix} M(\mathbf{q}) & \Phi_q(\mathbf{q}, t)^T \\ \Phi_q(\mathbf{q}, t) & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \end{pmatrix}$$

Se la matrice  $(n+m) \times (n+m)$  è invertibile allora possiamo determinare  $\ddot{\mathbf{q}}$  e  $\lambda$  e chiudere l'algoritmo.



## Algoritmo di integrazione

Mettendo tutto assieme otteniamo:

- Dato iniziale  $t_0 = 0$ ,  $\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}(0)$ ,  $\dot{\mathbf{q}}_0 = \dot{\mathbf{q}}(0)$ .

Per  $k = 0, 1, \dots$

- Risolvo il sistema lineare per ricavare  $\ddot{\mathbf{q}}_k$  e  $\lambda_k$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}(\mathbf{q}_k) & \Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_k, t_k)^T \\ \Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_k, t_k) & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_k \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{q}_k, \dot{\mathbf{q}}_k) \\ \mathbf{c}(\mathbf{q}_k, \dot{\mathbf{q}}_k, t_k) \end{pmatrix}$$

- Aggiorno le approssimazioni  $\mathbf{q}_{k+1}$  e  $\dot{\mathbf{q}}_{k+1}$

$$\dot{\mathbf{q}}_{k+1} = \dot{\mathbf{q}}_k + \ddot{\mathbf{q}}_k \Delta t$$

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{q}_k + \dot{\mathbf{q}}_k \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{q}}_k \Delta t^2$$



## Problemi dell'algoritmo proposto

(1/2)

- L'algoritmo precedentemente proposto è un algoritmo del primo ordine (errore di troncamento locale  $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ ) per il sistema (DAE.1)–(DAE.2")
- Il problema è che se considero la seguente equazione dei vincoli

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{q}, t) = \Phi(\mathbf{q}, t) + \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t$$

e la sostituisco al posto di  $\Phi(\mathbf{q}, t)$  ottengo lo stesso sistema (DAE.1)–(DAE.2").

- I vettori costanti  $\mathbf{a}_0$  e  $\mathbf{a}_1$  sono determinati dalle condizioni iniziali infatti se  $\mathbf{q}(0)$  e  $\dot{\mathbf{q}}(0)$  sono i dati iniziali allora  $\tilde{\Phi}(\mathbf{q}, t)$  deve soddisfare

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{q}(0), 0) = \Phi(\mathbf{q}(0), 0) + \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 \cdot 0 = \mathbf{0}$$

$$\frac{d}{dt} \tilde{\Phi}(\mathbf{q}(0), 0) = \frac{d}{dt} \Phi(\mathbf{q}(0), 0) + \mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$$



- Nel caso ideale le condizioni al contorno sono fissate in modo che  $\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$ .
- Ogni passo dello schema numerico produce  $\mathbf{q}_{k+1}$  che leggermente viola il vincolo  $\Phi(\mathbf{q}, t)$  quindi ogni passo dello schema numerico è come se cambiasse leggermente le costanti  $\mathbf{a}_0$  e  $\mathbf{a}_1$ .
- Anche ammettendo di fare un piccolissimo errore nel primo passo di fatto avremo una **deriva** della soluzione nei passi successivi di almeno  $\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t$ .
- Questo di fatto rende inutilizzabile questo schema se non per piccolissimi tempi.



Energia cinetica:

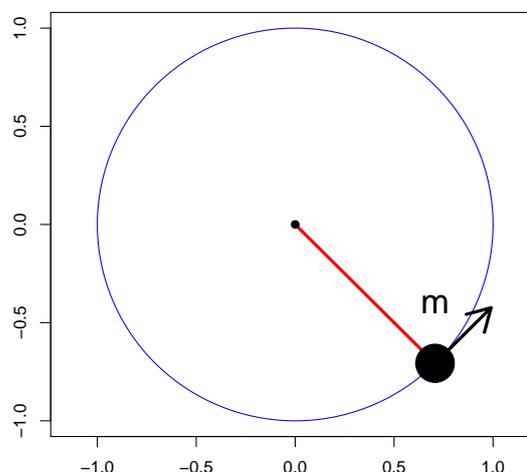
$$T(t) = \frac{1}{2}m(x'(t)^2 + y'(t)^2)$$

Energia potenziale

$$V(t) = mgy(t)$$

Vincolo

$$\Phi(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$



## Esempio: Pendolo in coordinate sovrabbondanti

(2/6)

Sistema di equazioni

$$mx''(t) + 2x(t)\lambda(t) = 0$$

$$my''(t) + 2y(t)\lambda(t) = -mg$$

$$x(t)^2 + y(t)^2 = 1$$

Derivando due volte il vincolo:

$$2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) = 0$$

$$2x(t)x''(t) + 2y(t)y''(t) + 2x'(t)^2 + 2y'(t)^2 = 0$$

Per cui abbiamo

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 2x(t) \\ 0 & m & 2y(t) \\ 2x(t) & 2y(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \\ \lambda(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ -2x'(t)^2 - 2y'(t)^2 \end{pmatrix}$$



## Esempio: Pendolo in coordinate sovrabbondanti

(3/6)

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 2x_k \\ 0 & m & 2y_k \\ 2x_k & 2y_k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k'' \\ y_k'' \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ -2(x_k')^2 - 2(y_k')^2 \end{pmatrix}$$

e risolvendo il sistema lineare

$$x_k'' = \frac{x_k (gy_k - s_k)}{r_k}$$

$$y_k'' = -\frac{gx_k^2 + y_k s_k}{r_k}$$

$$\lambda_k = -\frac{m(gy_k - s_k)}{2r_k}$$

dove  $r_k = x_k^2 + y_k^2$ ,  $s_k = (x_k')^2 + (y_k')^2$ .

## Esempio: Pendolo in coordinate sovrabbondanti

(4/6)

E da qui abbiamo lo schema numerico

- 1  $x_0, y_0, x'_0, y'_0$  sono assegnati compatibilmente al vincolo.
- 2 per  $k = 0, 1, 2, \dots$ 
  - calcolo  $x''_k, y''_k$  con le formule:

$$x''_k = \frac{x_k (gy_k - s_k)}{r_k}, \quad r_k = x_k^2 + y_k^2$$

$$y''_k = -\frac{gx_k^2 + y_k s_k}{r_k}, \quad s_k = (x'_k)^2 + (y'_k)^2$$

- Avanzo di  $\Delta t$  con le formule:

$$x_{k+1} = x_k + \Delta t x'_k + (\Delta t^2/2)x''_k$$

$$y_{k+1} = y_k + \Delta t y'_k + (\Delta t^2/2)y''_k$$

$$x'_{k+1} = x'_k + \Delta t x''_k$$

$$y'_{k+1} = y'_k + \Delta t y''_k$$



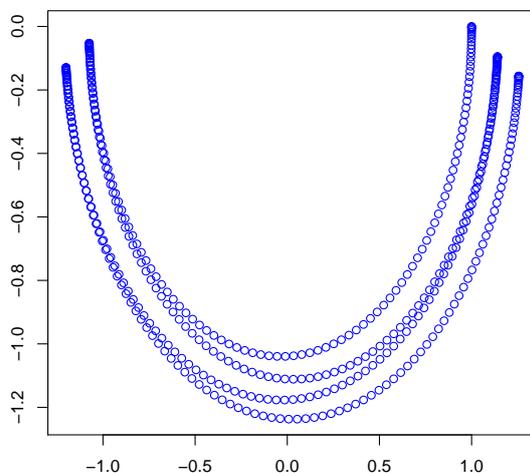
## Esempio: Pendolo in coordinate sovrabbondanti

(5/6)

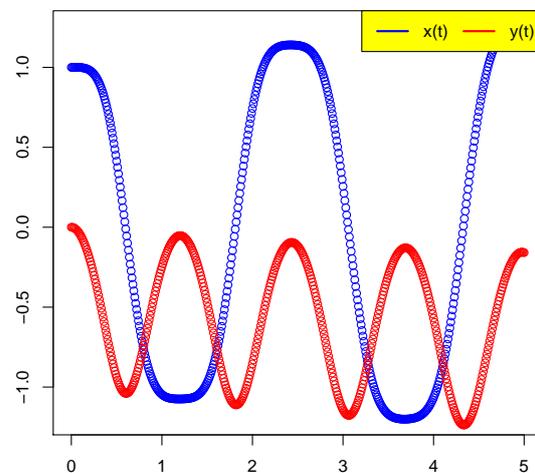
DAE integrata senza stabilizzazione

Dato iniziale **consistente**  $x_0 = 1, y_0 = 0, x'_0 = 0, y'_0 = 0$ .

Pendolo in coordinate naturali  $h=0.01$   $T=5$



Pendolo in coordinate naturali  $h=0.01$   $T=5$

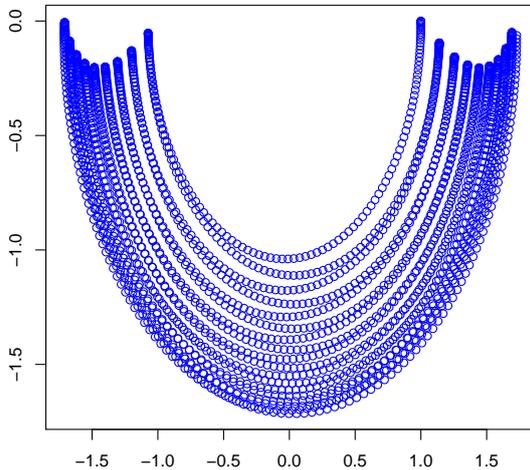
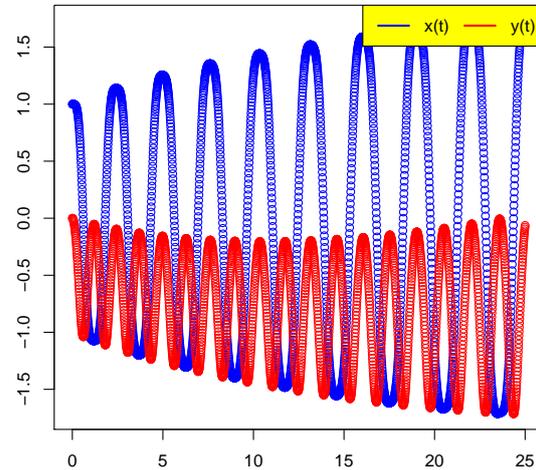


## Esempio: Pendolo in coordinate sovrabbondanti

(6/6)

DAE integrata senza stabilizzazione

Dato iniziale **consistente**  $x_0 = 1, y_0 = 0, x'_0 = 0, y'_0 = 0$ . Effetto a lungo termine

Pendolo in coordinate naturali  $h=0.01$   $T=25$ Pendolo in coordinate naturali  $h=0.01$   $T=25$ 

## Stabilizzazione alla Baumgarte

(1/5)

Nella derivazione precedente il problema è che se considero la seguente equazione dei vincoli

$$\tilde{\Phi}(q, t) = \Phi(q, t) + a_0 + a_1 t$$

non cambia nulla nella parte numerica. Consideriamo quindi la seguente equazione differenziale

$$z''(t) + 2\zeta\omega z'(t) + \omega^2 z(t) = 0$$

che ha come soluzione

$$z(t) = \left[ z(0) \cosh\left(t\omega \sqrt{\zeta^2 - 1}\right) + \frac{z'(0) + \zeta z(0)}{\omega \sqrt{\zeta^2 - 1}} \sinh\left(t\omega \sqrt{\zeta^2 - 1}\right) \right] e^{-t\zeta\omega}$$

Cioè se  $0 \leq \zeta \leq 1$  ma se abbiamo una soluzione oscillante con esponenziale decrescente.

## Stabilizzazione alla Baumgarte

(2/5)

cioè se  $0 \leq \zeta \leq 1$  ma se abbiamo una soluzione oscillante con esponenziale decrescente. In particolare se  $\zeta = 1$  abbiamo lo smorzamento critico e

$$z(t) = (z(0) + t z'(0)(1 + \omega))e^{-\omega t}$$

e se  $\zeta^2 = 1 - \varepsilon^2$  abbiamo

$$z(t) = \left[ (z'(0) + z(0)\zeta\omega) \frac{\sin(\omega\varepsilon t)}{\omega\varepsilon} + z(0) \cos(\omega\varepsilon t) \right] e^{-\omega\zeta t}$$

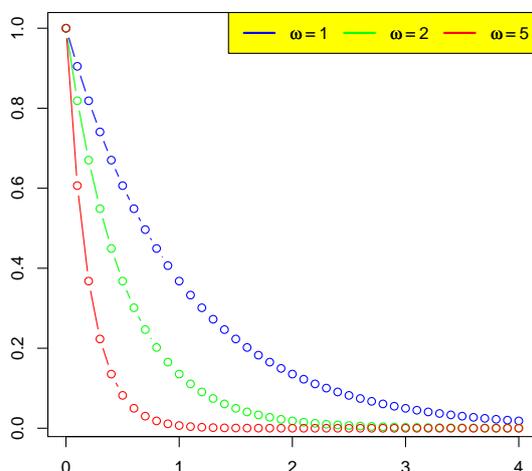
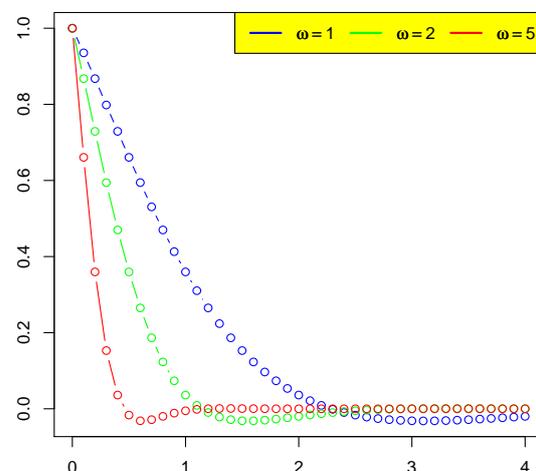
In ogni caso scegliendo  $\zeta \in (0, 1]$  abbiamo una soluzione che va a 0 esponenzialmente per  $t \rightarrow \infty$ .



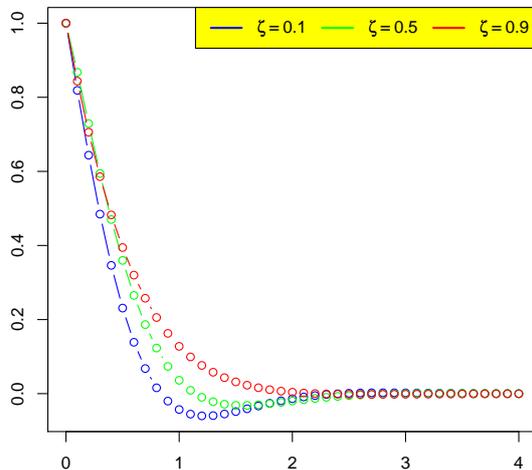
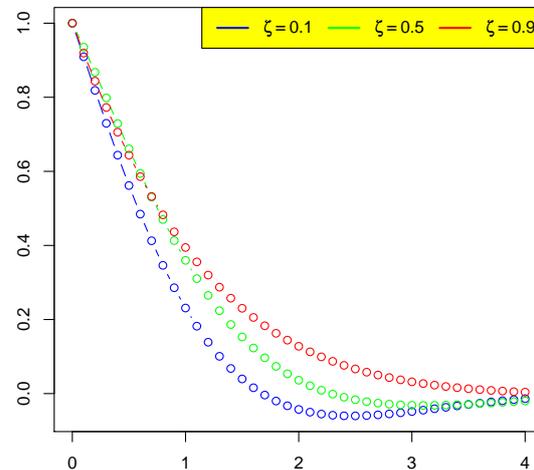
## Stabilizzazione alla Baumgarte

(3/5)

Esempio di soluzione con vari valori di  $\omega$  e  $\zeta$ .

Soluzione  $z(t)$  con  $\zeta = 1$ Soluzione  $z(t)$  con  $\zeta = 0.5$ 

Esempio di soluzione con vari valori di  $\omega$  e  $\zeta$ .

Soluzione  $z(t)$  con  $\omega = 2$ Soluzione  $z(t)$  con  $\omega = 1$ 

- Queste considerazioni suggeriscono di sostituire l'equazione

$$\frac{d^2}{dt^2} \Phi(\mathbf{q}(t), t) = \mathbf{0}$$

con la seguente

$$\frac{d^2}{dt^2} \Phi(\mathbf{q}(t), t) + 2\zeta\omega \frac{d}{dt} \Phi(\mathbf{q}(t), t) + \omega^2 \Phi(\mathbf{q}(t), t) = \mathbf{0}$$

- i parametri  $\zeta$  e  $\omega$  dovranno essere scelti in modo da rendere il decadimento della soluzione il più rapido possibile compatibilmente la stabilità numerica del metodo.
- In generale  $\zeta$  va scelto in  $[0, 1]$  piccolo ma non troppo (ad esempio 0.1) in modo da rendere l'abbattimento dell'errore il più rapido possibile.



## Esempio: Pendolo con stabilizzazione

(1/5)

Trasformiamo il sistema al primo ordine

$$x'(t) = u(t)$$

$$y'(t) = v(t)$$

$$mu'(t) + 2x(t)\lambda(t) = 0$$

$$mv'(t) + 2y(t)\lambda(t) = -mg$$

$$x(t)^2 + y(t)^2 = 1$$

Derivando due volte il vincolo:

$$2x(t)u(t) + 2y(t)v(t) = 0$$

$$2x(t)u'(t) + 2y(t)v'(t) + 2u(t)^2 + 2v(t)^2 = 0$$

Equazione del vincolo stabilizzata (omettiamo dipendenza da  $t$ )

$$2xu' + 2yv' + 2u^2 + 2v^2 + 2\zeta\omega(2xu + 2yv) + \omega^2(x^2 + y^2 - 1) = 0$$



## Esempio: Pendolo con stabilizzazione

(2/5)

Sostituendo le equazioni di  $u'(t)$  e  $v'(t)$  nella equazione del vincolo stabilizzata possiamo ricavare  $\lambda$

$$\lambda = \frac{2u^2 + 2v^2 + 2\zeta\omega(2xu + 2yv) + \omega^2(x^2 + y^2 - 1) - 2gy}{4(x^2 + y^2)}$$

possiamo allora integrare l'equazione usando il metodo di Eulero esplicito

$$\lambda_k = \frac{2(u_k^2 + v_k^2) + 4\zeta\omega(x_k u_k + y_k v_k) + \omega^2(x_k^2 + y_k^2 - 1) - 2gy_k}{4(x_k^2 + y_k^2)}$$

$$x_{k+1} = x_k + \Delta t u_k$$

$$y_{k+1} = y_k + \Delta t v_k$$

$$u_{k+1} = u_k - 2\Delta t m^{-1} x_k \lambda_k$$

$$v_{k+1} = v_k - 2\Delta t m^{-1} y_k \lambda_k - \Delta t g$$



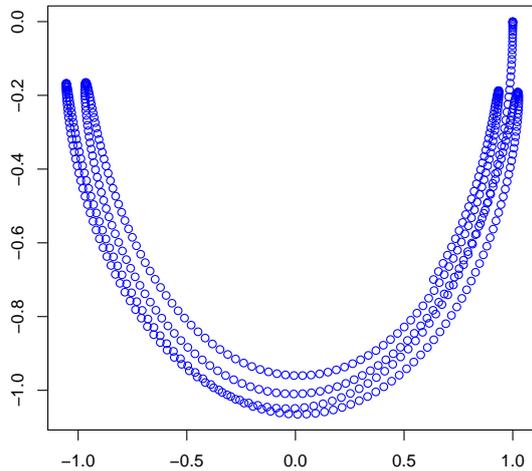
## Esempio: Pendolo con stabilizzazione

(3/5)

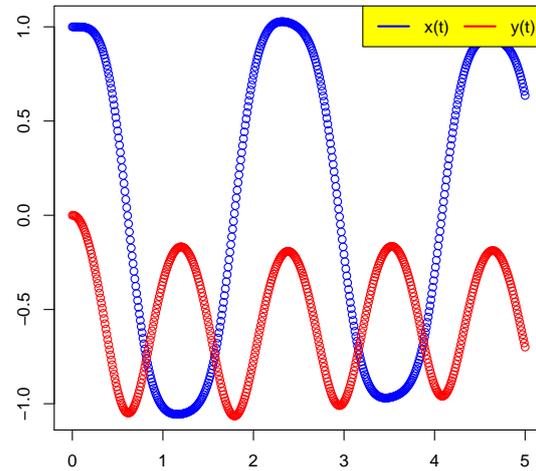
DAE integrata CON stabilizzazione

Dato iniziale **consistente**  $x_0 = 1, y_0 = 0, x'_0 = 0, y'_0 = 0$ . Parametri di stabilizzazione  $\omega = 1, \zeta = 0.1$ ,

Pendolo stabilizzato



Pendolo stabilizzato



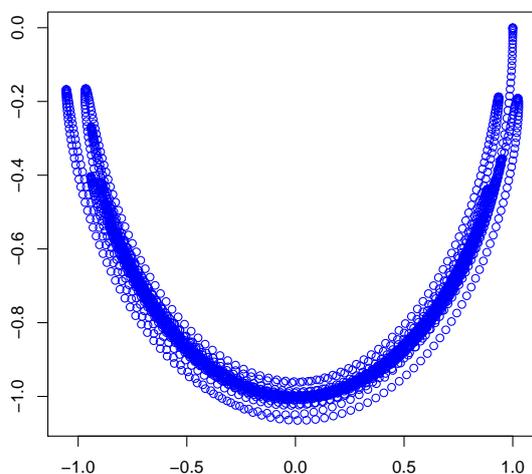
## Esempio: Pendolo con stabilizzazione

(4/5)

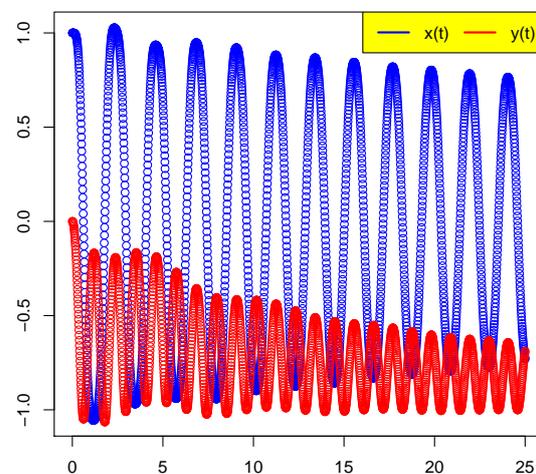
DAE integrata CON stabilizzazione

Dato iniziale **consistente**  $x_0 = 1, y_0 = 0, x'_0 = 0, y'_0 = 0$ . Parametri di stabilizzazione  $\omega = 1, \zeta = 0.1$ . Effetto a lungo termine

Pendolo stabilizzato



Pendolo stabilizzato



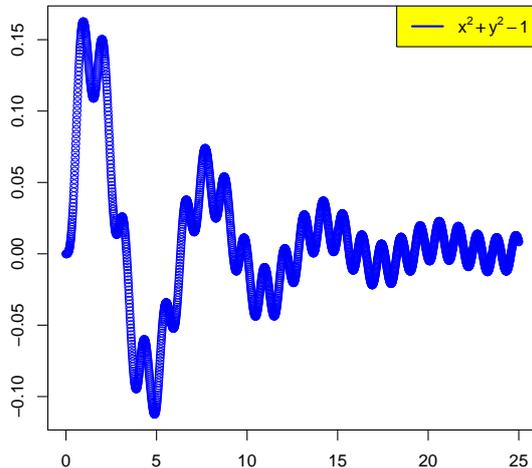
## Esempio: Pendolo con stabilizzazione

(5/5)

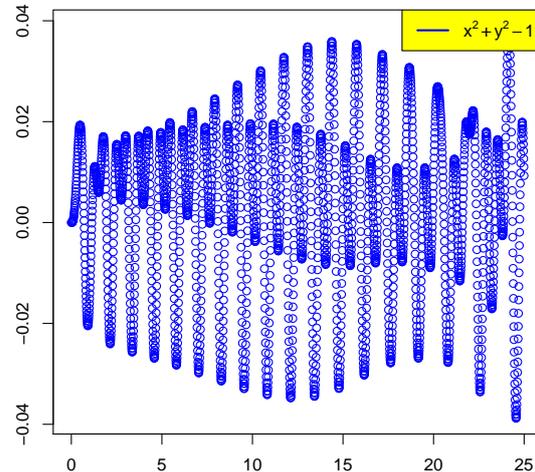
DAE integrata CON stabilizzazione

Dato iniziale **consistente**  $x_0 = 1, y_0 = 0, x'_0 = 0, y'_0 = 0$ . Parametri di stabilizzazione  $\omega = 1, \zeta = 0.1$  ed  $\omega = 10$ . Violazione del vincolo.

Violazione del vincolo



Violazione del vincolo



## Bibliografia



J. García de Jalón and E. Bayo, *Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems. The Real-Time Challenge*

Springer-Verlag, New-York, 1994

<http://mat21.etsii.upm.es/mbs/bookPDFs/bookGjB.htm>



Joachim W. Baumgarte, *Stabilization of Constraints and Integrals of Motion in Dynamical Systems*,

Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 1, pp. 1-16, (1972).



Joachim W. Baumgarte, *Stabilization by modification of the Lagrangian*

Celestial Mechanics, vol 13, pp. 247–251, (1976),