La Trasformata di Fourier

(Metodi Matematici e Calcolo per Ingegneria)

Enrico Bertolazzi

DIMS – Università di Trento

anno accademico 2007/2008

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830)

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Fourier.html

Outline

1. La trasformata di Fourier
2. Proprietà della trasformata di Fourier
   - Trasformata dell'impulso rettangolare
   - Trasformata del pettine di Dirac
   - Prodotto di convoluzione
   - Trasformata della distribuzione normale
   - Trasformata della funzione segno
3. Tabella delle trasformate

Costruzione della trasformata di Fourier (1/4)

- La serie di Fourier per una funzione periodica $g(t)$ di periodo 2ℓ é la seguente

$$S_\infty(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{k\pi t}{\ell}} \qquad c_k = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} g(t) e^{-i\frac{k\pi t}{\ell}}\, \mathrm{d}t,$$

- Possiamo immaginare di mandare il semi-periodo $\ell \to \infty$ per trattare funzioni generali.
- Il problema è che in questo caso i coefficienti c_k non sono calcolabili.

Costruzione della trasformata di Fourier (2/4)

- Tenendo fisso is semiperiodo ℓ, se denotiamo con $\lambda = \frac{k\pi}{\ell}$ allora possiamo scrivere:

$$S_\infty(t) = \sum_{\lambda=0,\pm\frac{\pi}{\ell},\pm\frac{2\pi}{\ell}} c(\lambda)e^{i\lambda t} \qquad c(\lambda) = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} g(t)e^{-i\lambda t}\,\mathrm{d}t,$$

- moltiplicando e dividendo la sommatoria precedente per $\frac{\pi}{\ell}$ possiamo interpretare la sommatoria come una approssimazione numerica di un integrale:

$$S_\infty(t) = \frac{\pi}{\ell}\sum_{\lambda=0,\pm\frac{\pi}{\ell},\pm\frac{2\pi}{\ell}} \frac{\ell}{\pi}c(\lambda)e^{i\lambda t} \approx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ell}{\pi}c(\lambda)e^{i\lambda t}d\lambda$$

La trasformata di Fourier

Costruzione della trasformata di Fourier (3/4)

- Chiamando $\tilde{g}(\lambda)$ la seguente funzione

$$\tilde{g}(\lambda) = \frac{\ell}{\pi}c(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\ell}^{\ell} g(t)e^{-i\lambda t}\,\mathrm{d}t,$$

- allora possiamo scrivere

$$S_\infty(t) \approx \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(\lambda)e^{i\lambda t}d\lambda$$

- A questo punto possiamo mandare il semi-periodo $\ell \to \infty$ per trattare funzioni generali, e se la sommatoria converge all'integrale otteniamo

$$S_\infty(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(\lambda)e^{i\lambda t}d\lambda \qquad \tilde{g}(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\lambda t}\,\mathrm{d}t,$$

Costruzione della trasformata di Fourier (4/4)

Viste le considerazioni precedenti si può definire per una funzione $f(t)$

- Trasformata di Fourier

$$\mathcal{F}\{f(t)\}(\lambda) = \tilde{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda t}\,\mathrm{d}t,$$

- Anti Trasformata di Fourier

$$\mathcal{F}^{-1}\{f(\lambda)\}(t) = f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\lambda)e^{i\lambda t}d\lambda$$

in generale bisogna stabilire sotto quali condizioni le formule determinate in modo euristico sono realmente valide.

Vari modi di scrivere la trasformata di Fourier

A seconda degli autori e delle preferenze la trasformata di Fourier (con la sua antitrasformata) si può scrivere in modi diversi

- Modo 1

$$\tilde{f}(\lambda) = \frac{1}{c_1}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda t}\,\mathrm{d}t, \qquad f(t) = \frac{1}{c_2}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\lambda)e^{i\lambda t}d\lambda$$

dove $c_1\, c_2 = 2\pi$. Ad esempio

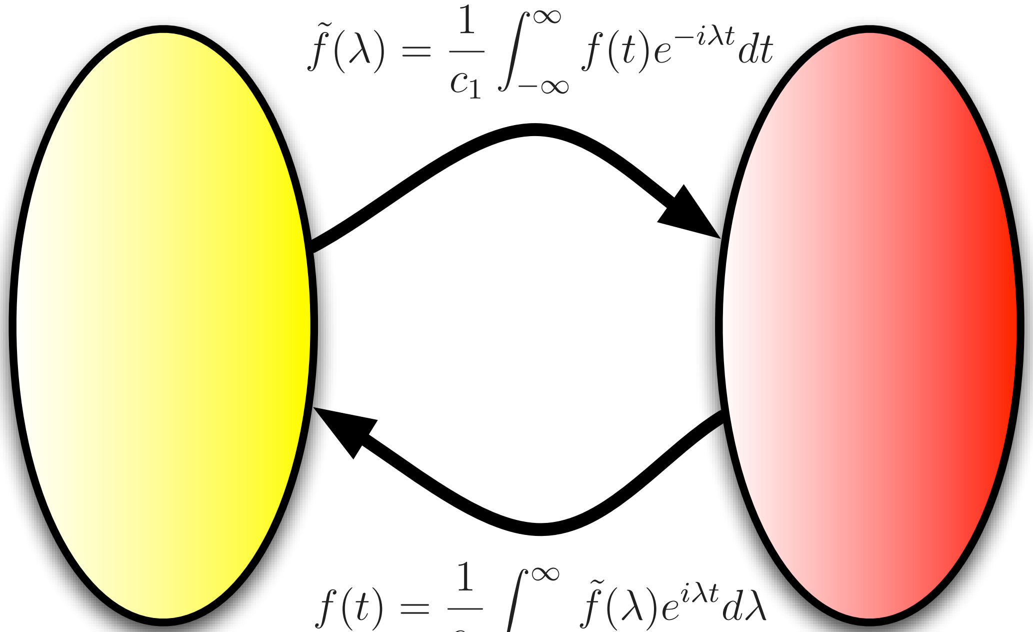
$$c_1 = 1, \qquad c_2 = 2\pi$$
$$c_1 = 2\pi, \qquad c_2 = 1$$
$$c_1 = \sqrt{2\pi}, \qquad c_2 = \sqrt{2\pi}$$

- Modo 2

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi\omega t}\,\mathrm{d}t, \qquad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega)e^{i2\pi\omega t}d\omega$$

Alcuni teoremi sulla trasformabilità

$$\tilde{f}(\lambda) = \frac{1}{c_1}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt$$



$$f(t) = \frac{1}{c_2}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\lambda)e^{i\lambda t}d\lambda$$

Alcuni teoremi sulla trasformabilità (1/2)

Teorema (fondamentale sulla trasformata di Fourier)

Sia $f(t)$ *regolare a tratti e assolutamente integrabile (cioè* $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, \mathrm{d}t < +\infty$*) allora la trasformata di Fourier* $\tilde{f}(\lambda) = \frac{1}{c_1}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda t}\, \mathrm{d}t$*, è definita per ogni* λ*. Inoltre*

1. $\tilde{f}(\lambda)$ *è una funzione continua;*
2. $\lim_{\lambda\to+\infty} \tilde{f}(\lambda) = 0$*;*
3. $f^\star(t) = \frac{1}{c_2}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\lambda)e^{i\lambda t}d\lambda$.

dove $f^\star(t) = f(t)$ *se* $f(t)$ *è continua in* t *altrimenti*

$$f^\star(t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon)+f(t-\varepsilon)}{2}$$

nei punti di discontinuità.

Alcuni teoremi sulla trasformabilità (2/2)

Questo teorema è stato dimostrato nel caso di funzioni a quadrato integrabile per un intervallo finito.

Teorema (Riemann–Lebesgue)

Sia $f \in L_1(\mathbb{R})$ (cioè assolutamente integrabile) allora vale

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda t}\,\mathrm{d}t = \lim_{|\lambda|\to+\infty} \tilde{f}(\lambda) = 0$$

Se inoltre $f(t)$ è derivabile k volte con $f^{(j)} \in L_1(\mathbb{R})$ per $j = 0, 1, \dots, k$ allora vale

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \tilde{f}(\lambda)\lambda^k = 0$$

come conseguenza se $f(t)$ è assolutamente integrabile la sua trasformata $\tilde{f}(\lambda)$ è infinitesima per $\lambda \to \pm\infty$.

Linearità

La trasformata di Fourier come la serie di Fourier è lineare

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\}(\lambda) &= \frac{1}{c_1}\int_{-\infty}^{\infty} (\alpha f(t) + \beta g(t))e^{-i\lambda t}\,\mathrm{d}t, \\
&= \frac{\alpha}{c_1}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda t}\,\mathrm{d}t + \frac{\beta}{c_1}\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\lambda t}\,\mathrm{d}t, \\
&= \alpha\,\mathcal{F}\{f(t)\}(\lambda) + \beta\,\mathcal{F}\{g(t)\}(\lambda)
\end{aligned}$$

Traslazione nel tempo

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f(t-a)\}(\lambda) &= \frac{1}{c_1}\int_{-\infty}^{\infty} f(t-a)e^{-i\lambda t}\,\mathrm{d}t,\\
&= \frac{1}{c_1}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{-i\lambda(z+a)}\,\mathrm{d}z,\\
&= \frac{e^{-i\lambda a}}{c_1}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{-i\lambda z}\,\mathrm{d}z,\\
&= e^{-i\lambda a}\mathcal{F}\{f(t)\}(\lambda)
\end{aligned}$$

Traslazione nelle frequenze

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left\{e^{iat}f(t)\right\}(\lambda) &= \frac{1}{c_1}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iat}f(t)e^{-i\lambda t}\,\mathrm{d}t,\\
&= \frac{1}{c_1}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i(\lambda-a)t}\,\mathrm{d}t,\\
&= \mathcal{F}\{f(t)\}(\lambda-a)
\end{aligned}$$

Dilatazione

$$\mathcal{F}\{f(\alpha t)\}(\lambda) = \frac{1}{c_1}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha t)e^{-i\lambda t}\,\mathrm{d}t,$$
$$= \frac{1}{c_1}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{-i\frac{\lambda}{\alpha}z}\,\mathrm{d}z,$$
$$= \frac{1}{\alpha}\tilde{f}\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)$$

Derivazione nel tempo

Assumendo che $\lim_{|t|\to\infty} f(t) = 0$

$$\mathcal{F}\{f'(t)\}(\lambda) = \frac{1}{c_1}\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-i\lambda t}\,\mathrm{d}t,$$
$$= \frac{1}{c_1}\left[f(t)e^{-i\lambda t}\right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{i\lambda}{c_1}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda t}\,\mathrm{d}t,$$
$$= (i\lambda)\,\mathcal{F}\{f(t)\}(\lambda)$$

applicando la formula ripetutamente

$$\mathcal{F}\left\{f^{(n)}(t)\right\}(\lambda) = (i\lambda)^n\,\mathcal{F}\{f(t)\}(\lambda)$$

Derivazione nelle frequenze

Assumendo che $\lim_{|t|\to\infty} f(t) = 0$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{(-it)f(t)\}(\lambda) &= \frac{1}{c_1}\int_{-\infty}^{\infty}(-it)f(t)e^{-i\lambda t}\,\mathrm{d}t, \\
&= \frac{1}{c_1}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{\mathrm{d}e^{-i\lambda t}}{\mathrm{d}\lambda}\,\mathrm{d}t, \\
&= \frac{1}{c_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda t}\,\mathrm{d}t, \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\mathcal{F}\{f(t)\}(\lambda)
\end{aligned}$$

applicando la formula ripetutamente

$$\mathcal{F}\{(-it)^n f(t)\}(\lambda) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\lambda^n}\mathcal{F}\{f(t)\}(\lambda)$$

Trasformata dell'impulso rettangolare

$$\chi_{[-a,a]}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-a,a] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{\chi_{[-a,a]}(t)\}(\lambda) &= \frac{1}{c_1}\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{[-a,a]}(t)e^{-i\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{c_1}\int_{-a}^{a} e^{-i\lambda t}\,\mathrm{d}t, \\
&= \frac{1}{c_1}\left[\frac{e^{-i\lambda t}}{-i\lambda}\right]_{-a}^{a} = \frac{1}{c_1}\frac{e^{-ia\lambda}-e^{ia\lambda}}{-i\lambda} \\
&= \frac{1}{c_1}\frac{2\sin(a\lambda)}{\lambda}
\end{aligned}$$

Trasformata della constante 1 (1/4)

la funzione constante $f(t) = 1$ è il limite dell'impulso rettangolare per $a \to \infty$ cioè

$$\lim_{a\to\infty} \mathcal{X}_{[-a,a]}(t) = 1, \qquad \forall t$$

però il limite

$$\lim_{a\to\infty} \mathcal{F}\left\{\mathcal{X}_{[-a,a]}(t)\right\}(\lambda) = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{c_1}\frac{2\sin(a\lambda)}{\lambda}$$

non esiste per nessun λ. Come Fare ?

Trasformata della constante 1 (2/4)

Vediamo allora come si comporta $\mathcal{F}\left\{\mathcal{X}_{[-a,a]}(t)\right\}(\lambda)$ integrato con un'altra funzione $f(\lambda)$ per $a \to \infty$ cioè:

$$\lim_{a\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\left\{\mathcal{X}_{[-a,a]}(t)\right\}(\lambda) f(\lambda)d\lambda = \frac{1}{c_1}\lim_{a\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin(a\lambda)}{\lambda} f(\lambda)d\lambda$$

Se $f(\lambda)$ è regolare a tratti e integrabile allora possiamo scrivere

$$\frac{f(\lambda)}{\lambda} = \frac{f(\lambda)-f(0)}{\lambda} + \frac{f(0)}{\lambda} = g(\lambda) + \frac{f(0)}{\lambda}$$

e quindi decomporre l'integrale nella somma di integrali più semplici

Trasformata della constante 1 (3/4)

$$\lim_{a\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}\left\{\chi_{[-a,a]}(t)\right\}(\lambda)f(\lambda)d\lambda =$$

$$\frac{1}{c_1}\lim_{a\to\infty}\int_{-1}^{1}2\sin(a\lambda)g(\lambda)d\lambda + \frac{1}{c_1}\lim_{a\to\infty}\int_{-1}^{1}\frac{2\sin(a\lambda)}{\lambda}f(0)d\lambda$$

$$+\frac{1}{c_1}\lim_{a\to\infty}\int_{1}^{\infty}2\sin(a\lambda)\frac{f(\lambda)}{\lambda}d\lambda + \frac{1}{c_1}\lim_{a\to\infty}\int_{-\infty}^{-1}2\sin(a\lambda)\frac{f(\lambda)}{\lambda}d\lambda$$

Per il teorema di Riemann-Lebesgue il primo il terzo e il quarto integrale sono nulli, quindi vale

$$\lim_{a\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}\left\{\chi_{[-a,a]}(t)\right\}(\lambda)f(\lambda)d\lambda = \frac{f(0)}{c_1}\lim_{a\to\infty}\int_{-1}^{1}\frac{2\sin(a\lambda)}{\lambda}d\lambda$$

Trasformata della constante 1 (4/4)

Facendo la sostituzione $z = a\lambda$ e osservando che $\sin(x)/x$ è una funzione pari otteniamo:

$$\begin{aligned}\lim_{a\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}\left\{\chi_{[-a,a]}(t)\right\}(\lambda)f(\lambda)d\lambda &= \frac{2f(0)}{c_1}\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a}\frac{\sin(z)}{z}\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{4f(0)}{c_1}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(z)}{z}\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

Quest'ultimo integrale non è esprimibile tramite primitive ma usando ad esempio il calcolo con i residui si trova:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(z)}{z}\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{2}$$

mettendo tutto assieme

$$\lim_{a\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}\left\{\chi_{[-a,a]}(t)\right\}(\lambda)f(\lambda)d\lambda = \frac{2\pi}{c_1}f(0)$$

Trasformata del pettine di Dirac (1/5)

considieriamo ora la seguente distribuzione:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-k)$$

cioè è la "funzione" che fa la seguente cosa

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)s(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-k)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)$$

se applichiamo formalmente la trasformata di Fourier al pettine e di Dirac otteniamo

$$\tilde{s}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-i\lambda t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda k}$$

ma questa non è una sertie convergente!.

Trasformata del pettine di Dirac (2/5)

Come nel caso della trasformata della costante vediamo come si comporta questa trasformata integrata con un'altra funzione

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\,\tilde{s}(\lambda)d\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{c_1} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \sum_{k=-n}^{n} e^{-i\lambda k} d\lambda$$

osserviamo che

$$\begin{aligned}\sum_{k=-n}^{n} e^{-i\lambda k} &= 1 + \sum_{k=1}^{n}(e^{-i\lambda k} + e^{i\lambda k}) \\ &= 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(\lambda k)\end{aligned}$$

Trasformata del pettine di Dirac (3/5)

Abbiamo già incontrato questa funzione nello studio della convergenza della serie di Fourier e vale

$$\sum_{k=-n}^{n} e^{-i\lambda k} = 2D_n(\lambda) = \frac{\sin((n+1/2)\lambda)}{\sin(\lambda/2)}$$

poiché

$$\sin(\theta+\pi) = \sin\theta\cos\pi + \cos\theta\sin\pi = -\sin\theta$$

abbiamo

$$D_n(\lambda+2\pi) = D_n(\lambda)$$

cioè $D_n(\lambda)$ è periodica di periodo 2π.

Trasformata del pettine di Dirac (4/5)

Sfruttando il teorema di convergenza delle serie di Fourier possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, \tilde{s}(\lambda) d\lambda &= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{c_1} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) D_n(\lambda) d\lambda \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi}{c_1} \frac{1}{\pi} \int_{(2m-1)\pi}^{(2m+1)\pi} f(\lambda) D_n(\lambda) d\lambda \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi}{c_1} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(2m\pi+\lambda) D_n(\lambda) d\lambda \\
&= \frac{2\pi}{c_1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(2m\pi)
\end{aligned}$$

Trasformata del pettine di Dirac (5/5)

Quindi essendo

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\,\tilde{s}(\lambda)d\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{c_1} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)D_n(\lambda)d\lambda = \frac{2\pi}{c_1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(2m\pi)$$

possiamo scrivere

$$\tilde{s}(\lambda) = \frac{2\pi}{c_1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\lambda - 2m\pi)$$

cioè $\tilde{s}(\lambda)$ è ancora un pettine di Dirac (con maglia più larga).

Trasformata del prodotto di convoluzione (1/2)

Definizione

Date due funzioni $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ si definisce prodotto di convoluzione $(f \star g)(t)$ la funzione:

$$(f \star g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-z)g(z)\,\mathrm{d}z$$

Teorema

Date due funzioni $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ la trasformata del prodotto di convoluzione $(f \star g)(t)$ esiste e vale:

$$\mathcal{F}\{(f \star g)(t)\}(\lambda) = c_1 \tilde{f}(\lambda)\,\tilde{g}(\lambda)$$

Trasformata del prodotto di convoluzione (1/2)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}\{(f \star g)(t)\}(\lambda) &= \frac{1}{c_1}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-z)g(z)\,\mathrm{d}z\right)e^{-i\lambda t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{c_1}\int_{-\infty}^{\infty} f(t-z)e^{-i\lambda t}\,\mathrm{d}t\right)g(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{c_1}{c_1}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\lambda)e^{-i\lambda z}g(z)\,\mathrm{d}z \\
&= c_1\tilde{f}(\lambda)\frac{1}{c_1}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda z}g(z)\,\mathrm{d}z \\
&= c_1\tilde{f}(\lambda)\tilde{g}(\lambda)
\end{aligned}
$$

Attenzione che nel fare la dimostrazione abbiamo invertito l'ordine di integrazione. Non sempre si può fare (teorema di Fubini) ma in questo caso si.

Trasformata della distribuzione normale (1/4)

Consideriamo la funzione

$$
f(t) = e^{-\alpha t^2}, \qquad \alpha > 0
$$

e la sua trasformata

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}(t) &= \frac{1}{c_1}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2}e^{-i\lambda t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{c_1}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2 - i\lambda t}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

completiamo $\frac{\alpha}{2}t^2 + i\lambda t$ ad un quadrato

$$
\alpha t^2 + i\lambda t = \left(\sqrt{\alpha}t + \frac{i\lambda}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2 + \frac{\lambda^2}{4\alpha}
$$

Trasformata della distribuzione normale (2/4)

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{c_1}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{\alpha}t+\frac{i\lambda}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2-\frac{\lambda^2}{4\alpha}}\,\mathrm{d}t$$

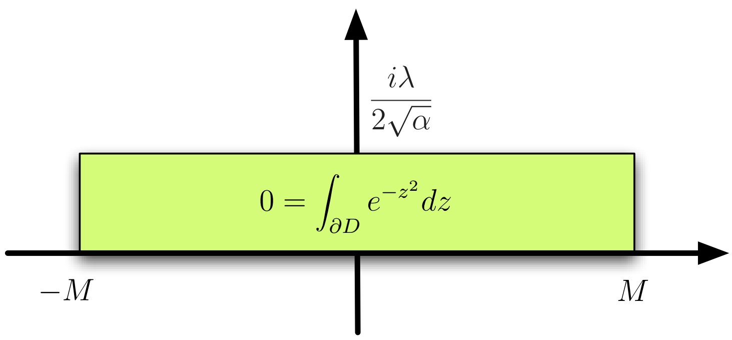
$$= \frac{e^{-\frac{\lambda^2}{4\alpha}}}{c_1}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{\alpha}t+\frac{i\lambda}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

facciamo il cambio di variabile $\sqrt{\alpha}t = z$

$$\tilde{f}(t) = \frac{e^{-\frac{\lambda^2}{4\alpha}}}{c_1\sqrt{\alpha}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(z+\frac{i\lambda}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2}\,\mathrm{d}z$$

vogliamo ora sfruttare il fatto che $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

Trasformata della distribuzione normale (3/4)



Sfruttando il fatto che e^{-z^2} è analitica intera.

$$\int_{-M}^{M} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\lambda}{2\sqrt{\alpha}}} e^{-(M+ix)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$-\int_{-M}^{M} e^{-\left(x+\frac{i\lambda}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2}\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\lambda}{2\sqrt{\alpha}}} e^{-(-M+ix)^2}\,\mathrm{d}x = 0$$

Trasformata della distribuzione normale (4/4)

Poiché

$$\lim_{M\to\infty}\int_0^{\frac{\lambda}{2\sqrt{\alpha}}} e^{-(\pm M+ix)^2}\,\mathrm{d}x = 0$$

allora avremo

$$\int_{-M}^{M} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-M}^{M} e^{-\left(x+\frac{i\lambda}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

e quindi

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{c_1}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\lambda^2}{4\alpha}}$$

Trasformata dell'esponenziale (1/2)

Consideriamo la funzione

$$f(t) = e^{-\alpha|t|}, \qquad \alpha > 0$$

e la sua trasformata

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{c_1}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|t|}e^{-i\lambda t}\,\mathrm{d}t$$

poiché $f(t)$ è pari allora essendo $e^{-i\lambda t} = \cos(\lambda t) - i\sin(\lambda t)$

$$\begin{aligned}\tilde{f}(t) &= \frac{1}{c_1}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|t|}\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{2}{c_1}\int_0^{\infty} e^{-\alpha t}\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Trasformata dell'esponenziale (2/2)

Integrando per parti un paio di volte otteniamo

$$\int e^{-\alpha t} \cos(\lambda t)\, \mathrm{d}t = \frac{e^{-\alpha\, t}\,(-\alpha\, \cos\,(\lambda\, t) + \sin\,(\lambda\, t)\,\lambda)}{\alpha^2 + \lambda^2}$$

e quindi

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{c_1}\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \lambda^2}$$

Trasformata della funzione segno (1/3)

Consideriamo la funzione

$$\mathrm{sign}(t) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ +1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

poiché è una funzione dispari allora vale

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathrm{sign}}(t) &= \frac{1}{c_1} \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} \mathrm{sign}(t) e^{-i\lambda t}\, \mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{c_1} \lim_{M\to\infty} \int_{0}^{M} (-i \sin(\lambda t))\, \mathrm{d}t \\ &= \frac{2i}{c_1} \lim_{M\to\infty} \left[\frac{\cos(\lambda t)}{\lambda}\right]_0^M = \frac{2i}{c_1} \lim_{M\to\infty} \frac{\cos(\lambda M) - 1}{\lambda} \end{aligned}$$

Trasformata della funzione segno (2/3)

Vediamo ora come si comporta

$$\frac{\cos(\lambda M) - 1}{\lambda}$$

integrata con un'altra funzione $f(\lambda)$ per $M \to \infty$ cioè:

$$\lim_{M\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(-i\lambda M) - 1}{\lambda} f(\lambda) d\lambda$$

Assumendo $f(\lambda)/\lambda$ regolare a tratti e integrabile possiamo scrivere

$$\lim_{M\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(-i\lambda M) - 1}{\lambda} f(\lambda) d\lambda =$$

$$\lim_{M\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(-i\lambda M) \frac{f(\lambda)}{\lambda} d\lambda - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\lambda)}{\lambda} d\lambda$$

Trasformata della funzione segno (3/3)

per il teorema di Riemann-Lebesgue

$$\lim_{M\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(-i\lambda M) \frac{f(\lambda)}{\lambda} d\lambda = 0$$

e quindi

$$\lim_{M\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(-i\lambda M) - 1}{\lambda} f(\lambda) d\lambda = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\lambda)}{\lambda} d\lambda$$

mettendo tutto assieme

$$\widetilde{\mathrm{sign}}(t) = -\frac{2i}{c_1 \lambda}$$

Tabella delle Trasformate (1/4)	
$f(t-a)$	$e^{-i\lambda a}\tilde{f}(\lambda)$
$e^{iat}f(t)$	$\tilde{f}(\lambda-a)$
$f(\alpha t)$	$\frac{1}{\alpha}\tilde{f}\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)$
$f'(t)$	$(i\lambda)\tilde{f}(\lambda)$
$(-it)f(t)$	$\frac{\mathrm{d}\tilde{f}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}$
$(f\star g)(t)$	$c_1\,\tilde{f}(\lambda)\,\tilde{g}(\lambda)$

Tabella delle Trasformate (2/4)	
$\chi_{[-a,a]}(t)$	$\frac{1}{c_1}\frac{2\sin(a\lambda)}{\lambda}$
1	$\frac{2\pi}{c_1}\delta(\lambda)$
$\mathrm{sign}(t)$	$-\frac{2i}{c_1\lambda}$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-k)$	$\frac{2\pi}{c_1}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(\lambda-2m\pi)$
$e^{-\alpha t^2}$	$\frac{1}{c_1}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\lambda^2}{4\alpha}}$
$e^{-\alpha\|t\|}$	$\frac{1}{c_1}\frac{2\alpha}{\alpha^2+\lambda^2}$

Tabella delle Trasformate (3/4)

$\sin(\alpha t)$	$\pi i\Big(\delta(\lambda+\alpha)-\delta(\lambda-\alpha)\Big)$
$\cos(\alpha t)$	$\pi\Big(\delta(\lambda+\alpha)+\delta(\lambda-\alpha)\Big)$
$\dfrac{1}{\lvert t\rvert}$	$i\pi-\log(-\lambda^2)$
$\dfrac{i}{\pi\, t}$	$\mathrm{sign}(\lambda)$
$\chi_{[-a,a]}(t)\sin(\alpha t)$	$i\left(\dfrac{\sin(a(\lambda+\alpha))}{\lambda+\alpha}-\dfrac{\sin(a(\lambda-\alpha))}{\lambda-\alpha}\right)$
$\chi_{[-a,a]}(t)\cos(\alpha t)$	$\dfrac{\sin(a(\lambda+\alpha))}{\lambda+\alpha}+\dfrac{\sin(a(\lambda-\alpha))}{\lambda-\alpha}$

Tabella delle Trasformate (4/4)

$u(t)\sin(\alpha t)$	$i\pi\dfrac{\delta(\lambda+\alpha)-\delta(\lambda-\alpha)}{2}+\dfrac{\alpha}{\alpha^2-\lambda^2}$
$u(t)\cos(\alpha t)$	$\pi\dfrac{\delta(\lambda+\alpha)+\delta(\lambda-\alpha)}{2}+\dfrac{i\lambda}{\alpha^2-\lambda^2}$
$u(t)e^{-at}\sin(\alpha t)$	$\dfrac{\alpha}{a^2+2ia\lambda+\alpha^2-\lambda^2}$
$u(t)e^{-at}\cos(\alpha t)$	$\dfrac{a+i\lambda}{a^2+2ia\lambda+\alpha^2-\lambda^2}$
$u(t)e^{-at}$	$\dfrac{1}{a+i\lambda}$
$u(t)t\,e^{-at}$	$\dfrac{1}{(a+i\lambda)^2}$
$u(t)t^k\,e^{-at}$	$\dfrac{k!}{(a+i\lambda)^{k+1}}$

Riferimenti

Kiyoshi Morita
Applied Fourier Transform
Cambridge University Press, 1988.

T.W.körner
Fourier Analysis
IOS Press, 1995.