

# La Trasformata di Fourier

(Metodi Matematici e Calcolo per Ingegneria)

Enrico Bertolazzi

DIMS – Università di Trento

anno accademico 2007/2008

## Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830)



<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Fourier.html>

### Outline

- 1 La trasformata di Fourier
- 2 Proprietà della trasformata di Fourier
  - Trasformata dell'impulso rettangolare
  - Trasformata del pettine di Dirac
  - Prodotto di convoluzione
  - Trasformata della distribuzione normale
  - Trasformata della funzione segno
- 3 Tabella delle trasformate

### Costruzione della trasformata di Fourier

(1/4)

- La serie di Fourier per una funzione periodica  $g(t)$  di periodo  $2\ell$  è la seguente

$$S_{\infty}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i \frac{k\pi t}{\ell}} \quad c_k = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} g(t) e^{-i \frac{k\pi t}{\ell}} dt,$$

- Possiamo immaginare di mandare il semi-periodo  $\ell \rightarrow \infty$  per trattare funzioni generali.
- Il problema è che in questo caso i coefficienti  $c_k$  non sono calcolabili.

## Costruzione della trasformata di Fourier

(2/4)

- Tenendo fisso il semiperiodo  $\ell$ , se denotiamo con  $\lambda = \frac{k\pi}{\ell}$  allora possiamo scrivere:

$$S_{\infty}(t) = \sum_{k=0, \pm \frac{\pi}{\ell}, \pm \frac{2\pi}{\ell}} c(\lambda) e^{i\lambda t} \quad c(\lambda) = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} g(t) e^{-i\lambda t} dt,$$

- moltiplicando e dividendo la sommatoria precedente per  $\frac{\pi}{\ell}$  possiamo interpretare la sommatoria come una approssimazione numerica di un integrale:

$$S_{\infty}(t) = \frac{\pi}{\ell} \sum_{\lambda=0, \pm \frac{\pi}{\ell}, \pm \frac{2\pi}{\ell}} \frac{\ell}{\pi} c(\lambda) e^{i\lambda t} \approx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ell}{\pi} c(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda$$



## Costruzione della trasformata di Fourier

(3/4)

- Chiamando  $\bar{g}(\lambda)$  la seguente funzione

$$\bar{g}(\lambda) = \frac{\ell}{\pi} c(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\ell}^{\ell} g(t) e^{-i\lambda t} dt,$$

- allora possiamo scrivere

$$S_{\infty}(t) \approx \int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda$$

- A questo punto possiamo mandare il semi-periodo  $\ell \rightarrow \infty$  per trattare funzioni generali, e se la sommatoria converge all'integrale otteniamo

$$S_{\infty}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda \quad \bar{g}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\lambda t} dt,$$



## Costruzione della trasformata di Fourier

(4/4)

Viste le considerazioni precedenti si può definire per una funzione  $f(t)$

- Trasformata di Fourier

$$\mathcal{F}\{f(t)\}(\lambda) = \bar{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt,$$

- Anti Trasformata di Fourier

$$\mathcal{F}^{-1}\{\bar{f}(\lambda)\}(t) = f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda$$

in generale bisogna stabilire sotto quali condizioni le formule determinate in modo euristico sono realmente valide.



## Vari modi di scrivere la trasformata di Fourier

A seconda degli autori e delle preferenze la trasformata di Fourier (con la sua antitrasformata) si può scrivere in modi diversi

- Modo 1

$$\bar{f}(\lambda) = \frac{1}{c_1} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt, \quad f(t) = \frac{1}{c_2} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda$$

dove  $c_1 c_2 = 2\pi$ . Ad esempio

$$c_1 = 1,$$

$$c_2 = 2\pi$$

$$c_1 = 2\pi,$$

$$c_2 = 1$$

$$c_1 = \sqrt{2\pi},$$

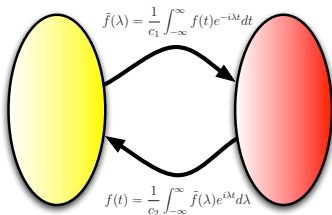
$$c_2 = \sqrt{2\pi}$$

- Modo 2

$$\bar{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i2\pi\omega t} dt, \quad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\omega) e^{i2\pi\omega t} d\omega$$



## Alcuni teoremi sulla trasformabilità



## Alcuni teoremi sulla trasformabilità

## Teorema (fondamentale sulla trasformata di Fourier)

Sia  $f(t)$  regolare a tratti e assolutamente integrabile (cioè

$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < +\infty$ ) allora la trasformata di Fourier

$\tilde{f}(\lambda) = \frac{1}{c_1} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt$ , è definita per ogni  $\lambda$ . Inoltre

•  $\tilde{f}(\lambda)$  è una funzione continua;

•  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \tilde{f}(\lambda) = 0$ ;

•  $f^*(t) = \frac{1}{c_2} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda$ .

dove  $f^*(t) = f(t)$  se  $f(t)$  è continua in  $t$  altrimenti

$$f^*(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon) + f(t - \varepsilon)}{2}$$

nei punti di discontinuità.



## Alcuni teoremi sulla trasformabilità

Questo teorema è stato dimostrato nel caso di funzioni a quadrato integrabile per un intervallo finito.

## Teorema (Riemann–Lebesgue)

Sia  $f \in L_1(\mathbb{R})$  (cioè assolutamente integrabile) allora vale

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt = \lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \tilde{f}(\lambda) = 0$$

Se inoltre  $f(t)$  è derivabile  $k$  volte con  $f^{(j)} \in L_1(\mathbb{R})$  per  $j = 0, 1, \dots, k$  allora vale

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \tilde{f}(\lambda) \lambda^k = 0$$

come conseguenza se  $f(t)$  è assolutamente integrabile la sua trasformata  $\tilde{f}(\lambda)$  è infinitesima per  $\lambda \rightarrow \pm\infty$ .



## Linearità

La trasformata di Fourier come la serie di Fourier è lineare

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\}(\lambda) &= \frac{1}{c_1} \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha f(t) + \beta g(t)) e^{-i\lambda t} dt, \\ &= \frac{\alpha}{c_1} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt + \frac{\beta}{c_1} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\lambda t} dt, \\ &= \alpha \mathcal{F}\{f(t)\}(\lambda) + \beta \mathcal{F}\{g(t)\}(\lambda) \end{aligned}$$



## Traslazione nel tempo

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\{f(t-a)\}(\lambda) &= \frac{1}{c_1} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-a)e^{-i\lambda t} dt, \\
 &= \frac{1}{c_1} \int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{-i\lambda(z+a)} dz, \\
 &= \frac{e^{-i\lambda a}}{c_1} \int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{-i\lambda z} dz, \\
 &= e^{-i\lambda a} \mathcal{F}\{f(t)\}(\lambda)
 \end{aligned}$$



## Traslazione nelle frequenze

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\{e^{iat}f(t)\}(\lambda) &= \frac{1}{c_1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iat}f(t)e^{-i\lambda t} dt, \\
 &= \frac{1}{c_1} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i(\lambda-a)t} dt, \\
 &= \mathcal{F}\{f(t)\}(\lambda-a)
 \end{aligned}$$



## Dilatazione

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\{f(at)\}(\lambda) &= \frac{1}{c_1} \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-i\lambda t} dt, \\
 &= \frac{1}{c_1} \int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{-i\lambda \frac{z}{a}} dz, \\
 &= \frac{1}{a} \mathcal{F}\left(\frac{\lambda}{a}\right)
 \end{aligned}$$



## Derivazione nel tempo

Assumendo che  $\lim_{|t| \rightarrow \infty} f(t) = 0$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\{f'(t)\}(\lambda) &= \frac{1}{c_1} \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-i\lambda t} dt, \\
 &= \frac{1}{c_1} \left[ f(t)e^{-i\lambda t} \right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{i\lambda}{c_1} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda t} dt, \\
 &= (i\lambda) \mathcal{F}\{f(t)\}(\lambda)
 \end{aligned}$$

applicando la formula ripetutamente

$$\mathcal{F}\{f^{(n)}(t)\}(\lambda) = (i\lambda)^n \mathcal{F}\{f(t)\}(\lambda)$$



## Derivazione nelle frequenze

Assumendo che  $\lim_{|t| \rightarrow \infty} f(t) = 0$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{(-it)f(t)\}(\lambda) &= \frac{1}{c_1} \int_{-\infty}^{\infty} (-it)f(t)e^{-i\lambda t} dt, \\ &= \frac{1}{c_1} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{de^{-i\lambda t}}{d\lambda} dt, \\ &= \frac{1}{c_1} \frac{d}{d\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda t} dt, \\ &= \frac{d}{d\lambda} \mathcal{F}\{f(t)\}(\lambda)\end{aligned}$$

applicando la formula ripetutamente

$$\mathcal{F}\{(-it)^n f(t)\}(\lambda) = \frac{d^n}{d\lambda^n} \mathcal{F}\{f(t)\}(\lambda)$$



## Trasformata dell'impulso rettangolare

$$\chi_{[-a,a]}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-a, a] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\chi_{[-a,a]}(t)\}(\lambda) &= \frac{1}{c_1} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-a,a]}(t)e^{-i\lambda t} dt = \frac{1}{c_1} \int_{-a}^a e^{-i\lambda t} dt, \\ &= \frac{1}{c_1} \left[ \frac{e^{-i\lambda t}}{-i\lambda} \right]_{-a}^a = \frac{1}{c_1} \frac{e^{-ia\lambda} - e^{ia\lambda}}{-i\lambda} \\ &= \frac{1}{c_1} \frac{2 \sin(a\lambda)}{\lambda}\end{aligned}$$



## Trasformata della costante 1

(1/4)

la funzione costante  $f(t) = 1$  è il limite dell'impulso rettangolare per  $a \rightarrow \infty$  cioè

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \chi_{[-a,a]}(t) = 1, \quad \forall t$$

però il limite

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \mathcal{F}\{\chi_{[-a,a]}(t)\}(\lambda) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{c_1} \frac{2 \sin(a\lambda)}{\lambda}$$

non esiste per nessun  $\lambda$ . Come Fare ?



## Trasformata della costante 1

(2/4)

Vediamo allora come si comporta  $\mathcal{F}\{\chi_{[-a,a]}(t)\}(\lambda)$  integrato con un'altra funzione  $f(\lambda)$  per  $a \rightarrow \infty$  cioè:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{\chi_{[-a,a]}(t)\}(\lambda) f(\lambda) d\lambda = \frac{1}{c_1} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \sin(a\lambda)}{\lambda} f(\lambda) d\lambda$$

Se  $f(\lambda)$  è regolare a tratti e integrabile allora possiamo scrivere

$$\frac{f(\lambda)}{\lambda} = \frac{f(\lambda) - f(0)}{\lambda} + \frac{f(0)}{\lambda} = g(\lambda) + \frac{f(0)}{\lambda}$$

e quindi decomporre l'integrale nella somma di integrali più semplici



## Trasformata della costante 1

(3/4)

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{\chi_{[-a,a]}(t)\}(\lambda) f(\lambda) d\lambda &= \\ \frac{1}{c_1} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 2 \sin(a\lambda) g(\lambda) d\lambda + \frac{1}{c_1} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \frac{2 \sin(a\lambda)}{\lambda} f(0) d\lambda \\ + \frac{1}{c_1} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-1}^{\infty} 2 \sin(a\lambda) \frac{f(\lambda)}{\lambda} d\lambda + \frac{1}{c_1} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{-1} 2 \sin(a\lambda) \frac{f(\lambda)}{\lambda} d\lambda \end{aligned}$$

Per il teorema di Riemann-Lebesgue il primo il terzo e il quarto integrale sono nulli, quindi vale

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{\chi_{[-a,a]}(t)\}(\lambda) f(\lambda) d\lambda = \frac{f(0)}{c_1} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \frac{2 \sin(a\lambda)}{\lambda} d\lambda$$



## Trasformata del pettine di Dirac

(1/5)

consideriamo ora la seguente distribuzione:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k)$$

cioè è la "funzione" che fa la seguente cosa

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) s(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - k) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)$$

se applichiamo formalmente la trasformata di Fourier al pettine e di Dirac otteniamo

$$\bar{s}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-i\lambda t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda k}$$

ma questa non è una serie convergente!



## Trasformata della costante 1

(4/4)

Facendo la sostituzione  $z = a\lambda$  e osservando che  $\sin(x)/x$  è una funzione pari otteniamo:

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{\chi_{[-a,a]}(t)\}(\lambda) f(\lambda) d\lambda &= \frac{2f(0)}{c_1} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a \frac{\sin(z)}{z} dz \\ &= \frac{4f(0)}{c_1} \int_0^{\infty} \frac{\sin(z)}{z} dz \end{aligned}$$

Quest'ultimo integrale non è esprimibile tramite primitive ma usando ad esempio il calcolo con i residui si trova:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(z)}{z} dz = \frac{\pi}{2}$$

mettendo tutto assieme

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{\chi_{[-a,a]}(t)\}(\lambda) f(\lambda) d\lambda = \frac{2\pi}{c_1} f(0)$$



## Trasformata del pettine di Dirac

(2/5)

Come nel caso della trasformata della costante vediamo come si comporta questa trasformata integrata con un'altra funzione

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \bar{s}(\lambda) d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{c_1} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \sum_{k=-n}^n e^{-i\lambda k} d\lambda$$

osserviamo che

$$\begin{aligned} \sum_{k=-n}^n e^{-i\lambda k} &= 1 + \sum_{k=1}^n (e^{-i\lambda k} + e^{i\lambda k}) \\ &= 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(\lambda k) \end{aligned}$$



## Trasformata del pettine di Dirac

(3/5)

Abbiamo già incontrato questa funzione nello studio della convergenza della serie di Fourier e vale

$$\sum_{k=-n}^n e^{-i\lambda k} = 2D_n(\lambda) = \frac{\sin((n+1/2)\lambda)}{\sin(\lambda/2)}$$

poiché

$$\sin(\theta + \pi) = \sin \theta \cos \pi + \cos \theta \sin \pi = -\sin \theta$$

abbiamo

$$D_n(\lambda + 2\pi) = D_n(\lambda)$$

cioè  $D_n(\lambda)$  è periodica di periodo  $2\pi$ .



## Trasformata del pettine di Dirac

(4/5)

Sfruttando il teorema di convergenza delle serie di Fourier possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \tilde{\delta}(\lambda) d\lambda &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{c_1} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) D_n(\lambda) d\lambda \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{c_1} \frac{1}{\pi} \int_{(2m-1)\pi}^{(2m+1)\pi} f(\lambda) D_n(\lambda) d\lambda \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{c_1} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(2m\pi + \lambda) D_n(\lambda) d\lambda \\ &= \frac{2\pi}{c_1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(2m\pi) \end{aligned}$$



## Trasformata del pettine di Dirac

(5/5)

Quindi essendo

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \tilde{\delta}(\lambda) d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{c_1} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) D_n(\lambda) d\lambda = \frac{2\pi}{c_1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(2m\pi)$$

possiamo scrivere

$$\tilde{\delta}(\lambda) = \frac{2\pi}{c_1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\lambda - 2m\pi)$$

cioè  $\tilde{\delta}(\lambda)$  è ancora un pettine di Dirac (con maglia più larga).



## Trasformata del prodotto di convoluzione

(1/2)

## Definizione

Date due funzioni  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$  si definisce prodotto di convoluzione  $(f \star g)(t)$  la funzione:

$$(f \star g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-z)g(z) dz$$

## Teorema

Date due funzioni  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$  la trasformata del prodotto di convoluzione  $(f \star g)(t)$  esiste e vale:

$$\mathcal{F}\{(f \star g)(t)\}(\lambda) = c_1 \tilde{f}(\lambda) \tilde{g}(\lambda)$$



## Trasformata del prodotto di convoluzione

(1/2)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\{(f \star g)(t)\}(\lambda) &= \frac{1}{c_1} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t-z)g(z) dz \right) e^{-i\lambda t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{c_1} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-z)e^{-i\lambda t} dt \right) g(z) dz \\
 &= \frac{c_1}{c_1} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\lambda) e^{-i\lambda z} g(z) dz \\
 &= c_1 \tilde{f}(\lambda) \frac{1}{c_1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda z} g(z) dz \\
 &= c_1 \tilde{f}(\lambda) \tilde{g}(\lambda)
 \end{aligned}$$

Attenzione che nel fare la dimostrazione abbiamo invertito l'ordine di integrazione. Non sempre si può fare (teorema di Fubini) ma in questo caso sì.



## Trasformata della distribuzione normale

(2/4)

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}(t) &= \frac{1}{c_1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{\alpha t + \frac{i\lambda}{2\sqrt{\alpha}}}\right)^2 - \frac{t^2}{4\alpha}} dt \\
 &= \frac{e^{-\frac{t^2}{4\alpha}}}{c_1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{\alpha t + \frac{i\lambda}{2\sqrt{\alpha}}}\right)^2} dt
 \end{aligned}$$

facciamo il cambio di variabile  $\sqrt{\alpha t} = z$

$$\tilde{f}(t) = \frac{e^{-\frac{t^2}{4\alpha}}}{c_1 \sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(z + \frac{i\lambda}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2} dz$$

vogliamo ora sfruttare il fatto che  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ .



## Trasformata della distribuzione normale

(1/4)

Consideriamo la funzione

$$f(t) = e^{-\alpha t^2}, \quad \alpha > 0$$

e la sua trasformata

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}(t) &= \frac{1}{c_1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2} e^{-i\lambda t} dt \\
 &= \frac{1}{c_1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2 - i\lambda t} dt
 \end{aligned}$$

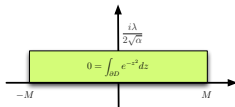
completiamo  $\frac{\alpha}{2}t^2 + i\lambda t$  ad un quadrato

$$\alpha t^2 + i\lambda t = \left( \sqrt{\alpha}t + \frac{i\lambda}{2\sqrt{\alpha}} \right)^2 + \frac{\lambda^2}{4\alpha}$$



## Trasformata della distribuzione normale

(3/4)



Sfruttando il fatto che  $e^{-z^2}$  è analitica intera.

$$\begin{aligned}
 &\int_{-M}^M e^{-x^2} dx + \int_0^{\frac{\lambda}{2\sqrt{\alpha}}} e^{-(-M+ix)^2} dx \\
 &- \int_{-M}^M e^{-\left(x + \frac{i\lambda}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2} dx - \int_0^{\frac{\lambda}{2\sqrt{\alpha}}} e^{-(-M+ix)^2} dx = 0
 \end{aligned}$$





## Trasformata della distribuzione normale

(4/4)

Poiché

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{M}{\sqrt{\alpha}}} e^{-(\pm M + ix)^2} dx = 0$$

allora avremo

$$\int_{-M}^M e^{-x^2} dx = \int_{-M}^M e^{-\left(x + \frac{ix}{\sqrt{\alpha}}\right)^2} dx = \sqrt{\pi}$$

e quindi

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{c_1} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{t^2}{4\alpha}}$$



## Trasformata dell'esponenziale

(2/2)

Integrando per parti un paio di volte otteniamo

$$\int e^{-\alpha t} \cos(\lambda t) dt = \frac{e^{-\alpha t} (-\alpha \cos(\lambda t) + \sin(\lambda t) \lambda)}{\alpha^2 + \lambda^2}$$

e quindi

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{c_1} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \lambda^2}$$



## Trasformata dell'esponenziale

(1/2)

Consideriamo la funzione

$$f(t) = e^{-\alpha|t|}, \quad \alpha > 0$$

e la sua trasformata

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{c_1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|t|} e^{-i\lambda t} dt$$

poiché  $f(t)$  è pari allora essendo  $e^{-i\lambda t} = \cos(\lambda t) - i \sin(\lambda t)$ 

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t) &= \frac{1}{c_1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|t|} \cos(\lambda t) dt \\ &= \frac{2}{c_1} \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \cos(\lambda t) dt \end{aligned}$$



## Trasformata dell'esponenziale

(2/2)

Integrando per parti un paio di volte otteniamo

$$\int e^{-\alpha t} \cos(\lambda t) dt = \frac{e^{-\alpha t} (-\alpha \cos(\lambda t) + \sin(\lambda t) \lambda)}{\alpha^2 + \lambda^2}$$

e quindi

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{c_1} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \lambda^2}$$



## Trasformata della funzione segno

(1/3)

Consideriamo la funzione

$$\text{sign}(t) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ +1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

poiché è una funzione dispari allora vale

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{sign}}(t) &= \frac{1}{c_1} \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \text{sign}(t) e^{-i\lambda t} dt \\ &= \frac{2}{c_1} \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M (-i \sin(\lambda t)) dt \\ &= \frac{2i}{c_1} \lim_{M \rightarrow \infty} \left[ \frac{\cos(\lambda t)}{\lambda} \right]_0^M = \frac{2i}{c_1} \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\cos(\lambda M) - 1}{\lambda} \end{aligned}$$



## Trasformata della funzione segno

(2/3)

Vediamo ora come si comporta

$$\frac{\cos(\lambda M) - 1}{\lambda}$$

integrata con un'altra funzione  $f(\lambda)$  per  $M \rightarrow \infty$  cioè:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(-i\lambda M) - 1}{\lambda} f(\lambda) d\lambda$$

Assumendo  $f(\lambda)/\lambda$  regolare a tratti e integrabile possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(-i\lambda M) - 1}{\lambda} f(\lambda) d\lambda &= \\ \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(-i\lambda M) \frac{f(\lambda)}{\lambda} d\lambda - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\lambda)}{\lambda} d\lambda \end{aligned}$$



## TABELLA DELLE TRASFORMATE (1/4)

|                  |                                                                 |
|------------------|-----------------------------------------------------------------|
| $f(t - a)$       | $e^{-i\lambda a} \tilde{f}(\lambda)$                            |
| $e^{iat} f(t)$   | $\tilde{f}(\lambda - a)$                                        |
| $f(\alpha t)$    | $\frac{1}{\alpha} \tilde{f}\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)$ |
| $f'(t)$          | $(i\lambda) \tilde{f}(\lambda)$                                 |
| $(-it)f(t)$      | $\frac{d\tilde{f}(\lambda)}{d\lambda}$                          |
| $(f \star g)(t)$ | $c_1 \tilde{f}(\lambda) \tilde{g}(\lambda)$                     |



## Trasformata della funzione segno

(3/3)

per il teorema di Riemann-Lebesgue

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(-i\lambda M) \frac{f(\lambda)}{\lambda} d\lambda = 0$$

e quindi

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(-i\lambda M) - 1}{\lambda} f(\lambda) d\lambda = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\lambda)}{\lambda} d\lambda$$

mettendo tutto assieme

$$\widetilde{\text{sign}(t)} = -\frac{2i}{c_1 \lambda}$$



## TABELLA DELLE TRASFORMATE (2/4)

|                                           |                                                                          |
|-------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| $\chi_{[-a,a]}(t)$                        | $\frac{1}{c_1} \frac{2 \sin(a\lambda)}{\lambda}$                         |
| 1                                         | $\frac{2\pi}{c_1} \delta(\lambda)$                                       |
| $\text{sign}(t)$                          | $-\frac{2i}{c_1 \lambda}$                                                |
| $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k)$ | $\frac{2\pi}{c_1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\lambda - 2m\pi)$     |
| $e^{-at^2}$                               | $\frac{1}{c_1} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\lambda^2}{4\alpha}}$ |
| $e^{-a t }$                               | $\frac{1}{c_1} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \lambda^2}$                     |



## TABELLA DELLE TRASFORMATE (3/4)

|                                   |                                                                                                                            |
|-----------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\sin(\alpha t)$                  | $\pi i (\delta(\lambda + \alpha) - \delta(\lambda - \alpha))$                                                              |
| $\cos(\alpha t)$                  | $\pi (\delta(\lambda + \alpha) + \delta(\lambda - \alpha))$                                                                |
| $\frac{1}{ t }$                   | $i\pi - \log(-\lambda^2)$                                                                                                  |
| $\frac{i}{\pi t}$                 | $\text{sign}(\lambda)$                                                                                                     |
| $\chi_{[-a,a]}(t) \sin(\alpha t)$ | $i \left( \frac{\sin(a(\lambda + \alpha))}{\lambda + \alpha} - \frac{\sin(a(\lambda - \alpha))}{\lambda - \alpha} \right)$ |
| $\chi_{[-a,a]}(t) \cos(\alpha t)$ | $\frac{\sin(a(\lambda + \alpha))}{\lambda + \alpha} + \frac{\sin(a(\lambda - \alpha))}{\lambda - \alpha}$                  |





## TABELLA DELLE TRASFORMATE (4/4)

|                              |                                                                                                        |
|------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $u(t) \sin(\alpha t)$        | $i\pi \frac{\delta(\lambda + \alpha) - \delta(\lambda - \alpha)}{2} + \frac{\alpha}{a^2 - \lambda^2}$  |
| $u(t) \cos(\alpha t)$        | $\pi \frac{\delta(\lambda + \alpha) + \delta(\lambda - \alpha)}{2} + \frac{i\lambda}{a^2 - \lambda^2}$ |
| $u(t)e^{-at} \sin(\alpha t)$ | $\frac{\alpha}{a^2 + 2ia\lambda + a^2 - \lambda^2}$                                                    |
| $u(t)e^{-at} \cos(\alpha t)$ | $\frac{a + i\lambda}{a^2 + 2ia\lambda + a^2 - \lambda^2}$                                              |
| $u(t)e^{-at}$                | $\frac{1}{a + i\lambda}$                                                                               |
| $u(t)t e^{-at}$              | $\frac{1}{(a + i\lambda)^2}$                                                                           |
| $u(t)t^k e^{-at}$            | $\frac{k!}{(a + i\lambda)^{k+1}}$                                                                      |



## Riferimenti

-  Kiyoshi Morita  
 Applied Fourier Transform  
 Cambridge University Press, 1988.
-  T.W.körner  
 Fourier Analysis  
 IOS Press, 1995.

