La trasformata Z

(Metodi Matematici e Calcolo per Ingegneria)

Enrico Bertolazzi

DIMS – Università di Trento

anno accademico 2007/2008
(aggiornata al 18/11/2007)

Outline

Definizione

- La trasformata Z si applica a segnali discreti causali.
- Un segnale discreto si denota con varie notazioni:

$$f_n \,:\, n = 0, 1, 2, \dots$$

$$f[n] \,:\, n = 0, 1, 2, \dots$$

$$f(n) \,:\, n = 0, 1, 2, \dots$$

- La trasformata è definita come:

$$\mathcal{Z}\left\{f_n\right\}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}$$

- Una notazione più leggera della Z-trasformata è la seguente:

$$\mathcal{Z}\left\{f_n\right\}(z) \equiv \widetilde{f}(z)$$

La trasformata Z

- Utilità: è usata nell'analisi dei segnali digitali; trasforma

Equazioni alle differenze $\Rightarrow$ Equazioni algebriche

- Analogia con il logaritmo:

$$a \longrightarrow \log a$$

$$a \cdot b \longrightarrow \log a + \log b$$

cioè il logaritmo trasforma i prodotti in somme che sono più facili da maneggiare.

Linearità della Z-trasformata

Siano f_n e g_n due segnali discreti ed α e β due scalari

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{\alpha f_n + \beta g_n\}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha f_n + \beta g_n) z^{-n} \\ &= \alpha \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} + \beta \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^{-n} \\ &= \alpha \mathcal{Z}\{f_n\}(z) + \beta \mathcal{Z}\{g_n\}(z)\end{aligned}$$

Impulso unitario

- L'impulso unitario è definito come segue

$$\delta_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0, \\ 0 & \text{se } n > 0, \end{cases}$$

- La sua trasformata si calcola immediatamente

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{\delta_n\}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n z^{-n} \\ &= 1\end{aligned}$$

Heaviside discreta o gradino

- Il gradino unitario è definito come segue

$$\mathbf{1} = \{1\}_{n=0}^{\infty}$$

- La sua trasformata si calcola immediatamente

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{\delta_n\}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_n z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \\ &= \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}\end{aligned}$$

Esponenziale

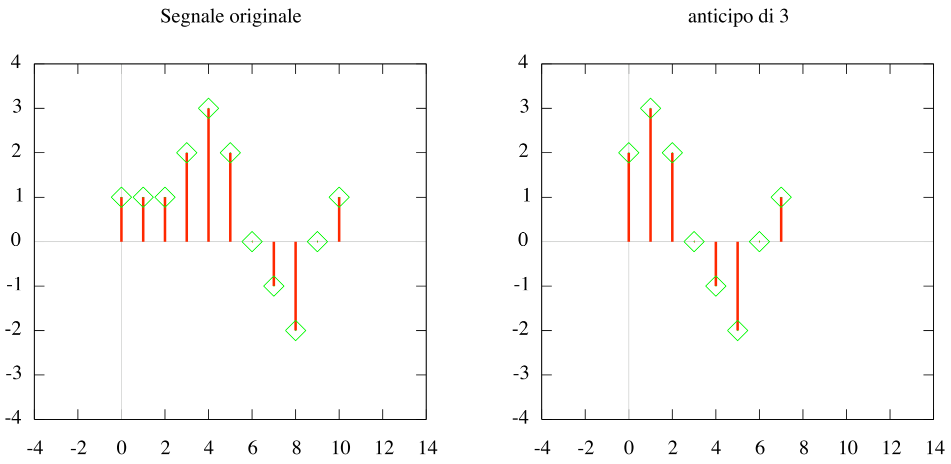
- Trasformata del segnale esponenziale a^n

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{a^n\}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n \\ &= \frac{1}{1-a/z} = \frac{z}{z-a}\end{aligned}$$

- Trasformata del prodotto per l'esponenziale a^n

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{a^n f_n\}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left(\frac{z}{a}\right)^{-n} \\ &= \mathcal{Z}\{f_n\}\left(\frac{z}{a}\right)\end{aligned}$$

Shift (Anticipo temporale) (1/2)



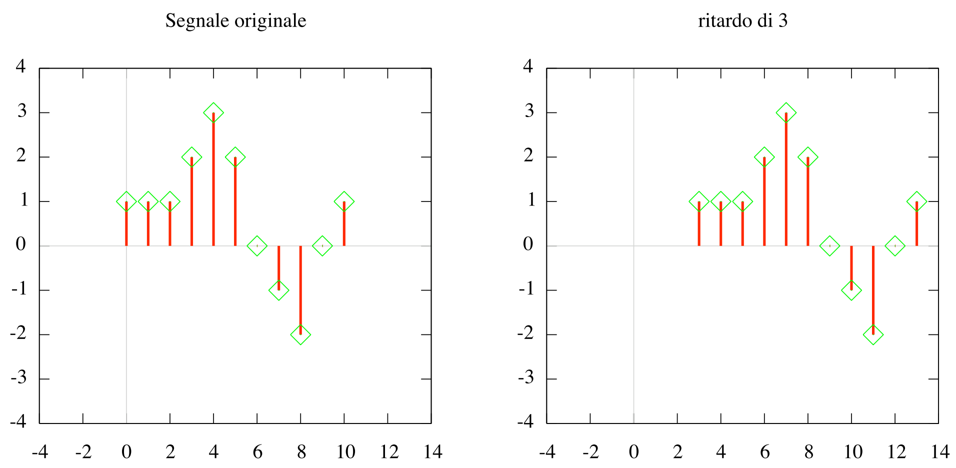
Shift (Anticipo temporale) (2/2)

Trasformata del segnale traslato f_{n+k} con $k > 0$ intero

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{f_{n+k}\}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+k} z^{-n} \\
&= z^k \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+k} z^{-(n+k)} \\
&= z^k \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} - z^k \sum_{n=0}^{k-1} f_n z^{-n} \\
&= z^k \left(\mathcal{Z}\{f_n\}(z) - \sum_{n=0}^{k-1} f_n z^{-n} \right)
\end{aligned}
$$

Osservazione: In analogia con la derivazione nella trasformata di Laplace ci sono le *condizioni iniziali* nella trasformata.

Shift (Ritardo temporale) (1/2)



Shift (Ritardo temporale) (2/2)

Trasformata del segnale traslato f_{n-k} con $k > 0$ intero

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{f_{n-k}\}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_{n-k} z^{-n} \\
&= z^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} f_{n-k} z^{-(n-k)} \\
&= z^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} \\
&= z^{-k} \mathcal{Z}\{f_n\}(z)
\end{aligned}
$$

Osservazione: A differenza della trasformata di Laplace qui non ci sono le *condizioni iniziali* nella trasfromata. Perche ?

Il segnale n_k (1/2)

- Il segnale n_k è definito come segue:

$$n_k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$$

- Casi particolari:
  - $n_0 = 1$;
  - $n_1 = n$.
- Osservando che

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}w^k} w^n = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)w^{n-k}$$

Possiamo scrivere

$$\mathcal{Z}\{n_k\}(1/w) = \sum_{n=0}^{\infty} n_k w^n = w^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}w^k} \sum_{n=0}^{\infty} w^n$$

Il segnale n_k (2/2)

La trasformata vale:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{n_k\}(1/w) &= w^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}w^k}\frac{1}{1-w} && = w^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}w^k}(1-w)^{-1} \\
&= w^k \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}w^{k-1}}(1-w)^{-2} && = w^k 2 \frac{\mathrm{d}^{k-2}}{\mathrm{d}w^{k-2}}(1-w)^{-3} \\
&= w^k 2\cdot 3 \frac{\mathrm{d}^{k-3}}{\mathrm{d}w^{k-3}}(1-w)^{-4} && = \cdots = \\
&= w^k \frac{k!}{(1-w)^{k+1}}
\end{aligned}$$

e sostituendo $z = 1/w$ otteniamo

$$\mathcal{Z}\{n_k\}(z) = \frac{z\,k!}{(z-1)^{k+1}}$$

Il segnale coefficiente binomiale

- Il segnale è definito come segue:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

- Casi particolari:
  - $\binom{n}{0} = 1$;
  - $\binom{n}{1} = n$.
- Osservando che

$$\binom{n}{k} = \frac{n_k}{k!}$$

  Possiamo scrivere

$$\mathcal{Z}\left\{\binom{n}{k}\right\}(z) = \frac{z}{(z-1)^{k+1}}$$

Z-trasformata della convoluzione (1/2)

- La convoluzione di due segnali f_n e g_n è definita come segue

$$(f \star g)_n = \sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k}$$

- Per la trasformata della convoluzione $(f \star g)(z) = \mathcal{Z}\left\{(f \star g)_n\right\}(z)$ vale la seguente notevole proprietà:

$$(f \star g)(z) = \widetilde{f}(z)\widetilde{g}(z)$$

Z-trasformata della convoluzione (2/2)

La trasformata vale

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left\{(f \star g)_n\right\}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k} z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{n-k} f_k g_{n-k} z^{-(n-k)} z^{-k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{n-k} g_{n-k} z^{-(n-k)} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k} \left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n z^{-n} \right) \\
&= \widetilde{f}(z)\widetilde{g}(z)
\end{aligned}
$$

Il segnale $\cos\omega n$

Usando l'uguaglianza $2\cos\alpha = e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}$ dove i è l'unità immaginaria nel campo complesso, possiamo calcolare:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left\{\cos\omega n\right\}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \cos\omega n \, z^{-n} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(e^{i\omega n} + e^{-i\omega n}) z^{-n} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(e^{i\omega} z^{-1})^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(e^{-i\omega} z^{-1})^n \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{1 - e^{i\omega} z^{-1}} + \frac{1}{2}\frac{1}{1 - e^{-i\omega} z^{-1}} \\
&= \frac{z}{2}\frac{z - e^{i\omega} + z - e^{-i\omega}}{(z - e^{i\omega})(z - e^{-i\omega})} \\
&= \frac{z^2 - z\cos\omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}
\end{aligned}
$$

Il segnale $\sin\omega n$

Usando l'uguaglianza $2i\sin\alpha = e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}$ dove i è l'unità immaginaria nel campo complesso, possiamo calcolare:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{\sin\omega n\}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sin\omega n\, z^{-n} = \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}(e^{i\omega n} - e^{-i\omega n})z^{-n} \\
&= \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}(e^{i\omega}z^{-1})^n - \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}(e^{-i\omega}z^{-1})^n \\
&= \frac{1}{2i}\frac{1}{1-e^{i\omega}z^{-1}} - \frac{1}{2i}\frac{1}{1-e^{-i\omega}z^{-1}} \\
&= \frac{z}{2i}\frac{z-e^{-i\omega}-z+e^{i\omega}}{(z-e^{i\omega})(z-e^{-i\omega})} \\
&= \frac{z\sin\omega}{z^2-2z\cos\omega+1}
\end{aligned}$$

Il segnale n^k (1/2)

Usando l'uguaglianza

$$-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}z^{-n} = nz^{-n}$$

e applicandola k volte otteniamo

$$\left(-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^k z^{-n} = \underbrace{\left(-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)\cdots\left(-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)}_{k \text{ volte}} z^{-n} = n^k z^{-n}$$

usando questa uguaglianza nella trasformata $\mathcal{Z}\left\{f_n n^k\right\}(z)$ otteniamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left\{f_n n^k\right\}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n n^k z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left(-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^k z^{-n} \\
&= \left(-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^k \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} = (-1)^k\left(z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^k \mathcal{Z}\{f_n\}(z)
\end{aligned}$$

Il segnale n^k (2/2)

Usando la regola

$$\mathcal{Z}\left\{f_n n^k\right\}(z) = (-1)^k \left(z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^k \mathcal{Z}\left\{f_n\right\}(z)$$

e applicandola con $f_n = \mathbf{1}_n$ otteniamo

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\left\{n^k\right\}(z) &= (-1)^k \left(z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^k \mathcal{Z}\left\{\mathbf{1}_n\right\}(z) \\ &= (-1)^k \left(z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^k \frac{z}{z-1}\end{aligned}$$

Una trasformata importante (1/2)

Riconsideriamo il segnale $n_k = n(n-1)\cdots(n-k+1)$ ed osserviamo che

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^k z^{-(n-k+1)} = (-1)^k n_k z^{-n-1}$$

usando questa uguaglianza possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\left\{f_{n-k} n_k\right\}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_{n-k} n_k z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f_{n-k} (-1)^k z \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^k z^{-(n-k+1)} \\ &= (-1)^k z \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^k \left[\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} f_{n-k} z^{-(n-k)}\right]\end{aligned}$$

Una trasformata importante (2/2)

Osservando che $f_n = 0$ per $n < 0$ otteniamo Riconsideriamo il segnale $n_k = n(n-1)\cdots(n-k+1)$ ed osserviamo che

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{f_{n-k} n_k\}(z) &= (-1)^k z \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^k \left[\frac{1}{z}\sum_{m=-k}^{\infty} f_m z^{-m}\right] \\
&= (-1)^k z \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^k \left[\frac{1}{z}\mathcal{Z}\{f_n\}(z)\right]
\end{aligned}
$$

Tabella delle Trasformate (1/2)	
δ_n	1
$\mathbf{1}_n$	$\dfrac{z}{z-1}$
a^n	$\dfrac{z}{z-a}$
$a^n\, f_n$	$\widetilde{f}\left(\dfrac{z}{a}\right)$
$a^n \dbinom{n}{k}$	$\dfrac{a^k\, z}{(z-a)^{k+1}}$
$n^k f_n$	$(-1)^k\left(z\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^k \widetilde{f}(z)$

Tabella delle Trasformate (2/2)

f_{n+k}	$z^k\left(\widetilde{f}(z) - \sum_{j=0}^{k-1} f_j z^{-j}\right)$
f_{n-k}	$z^{-k}\widetilde{f}(z)$
$(f \star g)_n$	$\widetilde{f}(z)\widetilde{g}(z)$
$a^n \sin \omega n$	$\dfrac{za \sin \omega}{z^2 - 2za\cos\omega + a^2}$
$a^n \cos \omega n$	$\dfrac{z^2 - za\cos\omega}{z^2 - 2za\cos\omega + a^2}$
$f_{n-k} n_k$	$(-1)^k z \dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k}\left(\dfrac{1}{z}\widetilde{f}(z)\right)$

Teorema del valore iniziale e finale

Teorema (Teorema del valore finale)

Se un segnale f_n raggiunge un limite costante, cioè

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f_\infty$$

allora vale

$$f_\infty = \lim_{z\to 1} \frac{z}{z-1}\widetilde{f_n}(z)$$

Teorema (Teorema del valore iniziale)

$$f_0 = \lim_{z\to\infty} \widetilde{f_n}(z)$$

Forma standard della Z-trasformata

- In molte applicazioni la Z-trasformata si può normalmente scrivere nella forma:

$$\frac{G(z)}{z} = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_m z^m}{(z-p_1)^{m_1}(z-p_2)^{m_2}\cdots(z-p_n)^{m_n}}$$

dove $p_i \neq p_j$ se $i \neq j$.

- Possiamo sempre assumere che $\partial P(z) < \partial Q(z)$.
- Come nel caso sella trasformata di Laplace possiamo decomporre la trasformata in fratti semplici:

$$\frac{G(z)}{z} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_j} \frac{\alpha_{jk}}{(z-p_j)^k}$$

Formula esplicita della soluzione

Avendo scritto $G(z)$ come somma di fratti semplici come segue

$$G(z) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m_j} \alpha_{ji} \frac{z}{(z-p_j)^i}$$

formalmente l'inversa diventa consultando la tabella delle trasformate:

$$G_n = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m_j} \alpha_{ji} n_{i-1} p_j^n$$

Il problema di questa espressione è che se p_j è un numero complesso il termine corrispondente è una funzione a valori complessi della quale non abbiamo definito la Z-trasformata. In ogni caso essendo le radici complesse coniugate si può comunque usare questa espressione che produce una successione reale.

Esempio: successione di Fibonacci (1/3)

- La successione è definita ricorsivamente da

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \qquad F_0 = F_1 = 1$$

Attenzione, se non si vogliono perdere le condizioni iniziali usare sempre lo shift in avanti

- Applicando la Z-trasformata e la regola dello shift

$$z^2 \widetilde{F}(z) - F_0 z^2 - F_1 z = z\widetilde{F}(z) - F_0 z + \widetilde{F}(z)$$

- Risolvendo rispetto alla trasformata

$$\widetilde{F}(z) = \frac{F_0 z^2 + (F_1 - F_0) z}{z^2 - z - 1}$$

- ponendo le condizioni iniziali: $F_0 = F_1 = 1$

$$\widetilde{F}(z) = \frac{z^2}{z^2 - z - 1}$$

Esempio: successione di Fibonacci (2/3)

- dalla decomposizione

$$z^2 - z - 1 = (z - z_1)(z - z^2), \qquad z_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \; z_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

- Dalla espansione in fratti semplici

$$\frac{\widetilde{F}(z)}{z} = \frac{z}{z^2 - z - 1} = \frac{A}{z - z_1} + \frac{B}{z - z_2}$$

dove $A = (5 + \sqrt{5})/10$ e $B = (5 - \sqrt{5})/10$, si ottiene

$$\widetilde{F}(z) = \frac{Az}{z - z_1} + \frac{Bz}{z - z_2}$$

Esempio: successione di Fibonacci (3/3)

- Usando la trasformazione $\mathcal{Z}\{a^n\}(z) = z/(z-a)$ otteniamo

$$F_n = Az_1^n + Bz_2^n$$

- sostituendo

$$z_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad z_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad A = \frac{5+\sqrt{5}}{10}, \quad B = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$$

si ottiene

$$F_n = \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

Perchè bisogna usare lo shift in avanti ?

- Consideriamo la successione di fibonacci definita come

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \qquad F_0 = F_1 = 1$$

- Qualunque sia la soluzione F_n gli shift $G_n = F_{n-1}$ e $H_n = F_{n-2}$ sono tali che $G_0 = 0$ e $H_0 = 0$.
- Questo implica che $F_0 = G_0 + H_0 = 0$ cioè le condizioni iniziali di fatto sono fissate e sono poste a zero.
- In pratica lo shift in avanti si può usare se le condizioni iniziali si sa già che sono tutte nulle.
- Una alternativa è usare la trasformata Z bilatera

$$\mathcal{Z}\{f_n\}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n z^{-n} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} f_n z^{-n}$$

Riferimenti

Joel L. Schiff
The Laplace Transform, theory and applications
Springer-Verlag, 1999.

U. Graf
Applied Laplace Transforms and z-Transforms for Scientists and Engineers
Birkhäuser, 2004.

Anthony C. Grove
An Introduction to the Laplace Transform and the Z Transform
Prentice Hall, 1991.