La trasformata di Laplace

(Metodi Matematici e Calcolo per Ingegneria)

Enrico Bertolazzi

DIMS – Università di Trento

anno accademico 2007/2008

(aggiornata al 18/11/2007)

Outline

La trasformata di Laplace

- Definizione

$$f(t) \to \widehat{f}(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s)$$

$$\widehat{f}(s) = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t = \lim_{\epsilon\to 0^+}\lim_{M\to+\infty}\int_{-\epsilon}^{M} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t$$

- Utilità: trasforma

Equazioni differenziali $\Rightarrow$ Equazioni algebriche

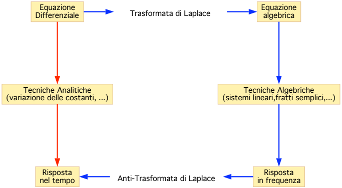
- Analogia con il logaritmo:

$$a \to \log a$$

$$a \cdot b \to \log a + \log b$$

cioè il logaritmo trasforma i prodotti in somme che sono più facili da maneggiare.

Uso della trasformata di Laplace per risolvere ODE



Proprietà della Trasformata

Tabella 1			
Linearità	$a\,f(t)+b\,g(t)$	$a\,\widehat{f}(s)+b\,\widehat{g}(s)$	1
Cambio di scala	$f(at)$	$\frac{1}{a}\,\widehat{f}\left(\frac{s}{a}\right) \qquad [a>0]$	2
Traslazione in s	$e^{at}f(t)$	$\widehat{f}(s-a)$	3
Traslazione in t	$f(t-a)$	$e^{-as}\widehat{f}(s)$	4

a e b sono numeri reali.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{af(t)+bg(t)\}(s) &= \int_{0^-}^{+\infty}(af(t)+bg(t))e^{-st}\,\mathrm{d}t\\
&= a\int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t + b\int_{0^-}^{+\infty} g(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t\\
&= a\widehat{f}(s)+b\widehat{g}(s)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(at)\}(s) &= \int_{0^-}^{+\infty} f(at)e^{-st}\,\mathrm{d}t \qquad [t=z/a]\\
&= \int_{0^-}^{+\infty} f(z)e^{-sz/a}\,\frac{\mathrm{d}z}{a}\\
&= \frac{1}{a}\widehat{f}\left(\frac{s}{a}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\}(s) &= \int_{0^-}^{+\infty} e^{at}f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{(a-s)t}\,\mathrm{d}t\\
&= \widehat{f}(s-a)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t-a)\}(s) &= \int_{0^-}^{+\infty} f(t-a)e^{-st}\,\mathrm{d}z \qquad [t-a=z]\\
&= \int_{-z}^{+\infty} f(z)e^{-s(z+a)}\,\mathrm{d}z \qquad [f(z)=0 \text{ per } z\le 0]\\
&= e^{-sa}\int_{0}^{+\infty} f(z)e^{-sz}\,\mathrm{d}z\\
&= e^{-as}\widehat{f}(s)
\end{aligned}
$$

Funzioni trasformabili (1/3)

- Non tutte le funzioni sono trasformabili, ad esempio

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{e^{t^2}\right\}(s) &= \int_{0^-}^{+\infty} e^{t^2-st}\,\mathrm{d}t\\
&= \int_{0^-}^{T} e^{(t-s)t}\,\mathrm{d}t + \int_{T}^{+\infty} e^{(t-s)t}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

per ogni valore di s scegliendo $T>\mathrm{Re}(s)$ si ha che

$$\int_{T}^{+\infty} e^{(t-s)t}\,\mathrm{d}t$$

non è convergente e quindi la funzione non è trasformabile per nessun valore di s.

Funzioni trasformabili (2/3)

Se $f(t)$ è continua con limite di crescita: $|f(t)| \leq Me^{Nt}$ per $t \geq T$ allora è Laplace-trasformabile:

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_{0^-}^{T} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t + \int_{T}^{+\infty} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t$$

Infatti

$$\left|\int_{T}^{+\infty} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_{T}^{+\infty} \left|f(t)e^{-st}\right|\,\mathrm{d}t \leq \int_{T}^{+\infty} Me^{Nt}\left|e^{-st}\right|\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{T}^{+\infty} Me^{Nt}e^{-\mathrm{Re}(s)t}\,\mathrm{d}t = M\int_{T}^{+\infty} e^{(N-\mathrm{Re}(s))t}\,\mathrm{d}t$$

ed per $\mathrm{Re}(s) > N$ si ha che

$$\lim_{T\to+\infty}\int_{T}^{+\infty} e^{(N-\mathrm{Re}(s))t}\,\mathrm{d}t = 0$$

Funzioni trasformabili (3/3)

Definizione (Funzioni generalmente continue)

$f(t)$ è generalmente continua se per ogni intervallo $[0,T]$

- *è discontinua al più in un numero finito di punti*
- *la funzione è limitata*

Definizione (Funzioni di ordine esponenziale)

$f(t)$ è di ordine esponenziale se è generalmente continua con limite di crescita:

$$|f(t)| \leq Me^{Nt} \qquad \textit{per} \quad t \geq T$$

Da ora in poi se non specificamente indicato assumiamo che le funzioni considerate siano di ordine esponenziale e con derivate generalmente continue fino all'ordine che a serve.

Teorema (1)

Sia $f(t)$ di ordine esponenziale allora vale:

$$\lim_{s\to\infty}\widehat{f}(s) = 0, \qquad s \in \mathbb{R}$$

Derivazione: Assumendo s reale

$$\left|\widehat{f}(s)\right| = \left|\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_{0^-}^{\infty} |f(t)|\,e^{-st}\,\mathrm{d}t$$

$$\leq M\int_{0^-}^{\infty} e^{(N-s)t}\,\mathrm{d}t = \frac{M}{s-N}$$

ma

$$\lim_{s\to+\infty}\frac{M}{s-N} = 0$$

Trasformata della crescita polinomiale ed esponenziale

- Funzione di Heaviside
$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0; \\ 1 & \text{se } t \geq 0. \end{cases}$$
- Crescita lineare
$$t_+ = t\,u(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0; \\ t & \text{se } t \geq 0. \end{cases}$$
- Crescita polinomale
$$t_+^k = t^k\,u(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0; \\ t^k & \text{se } t \geq 0. \end{cases}$$
- Crescita esponenziale
$$v(t) = a^{bt}\,u(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0; \\ a^{bt} & \text{se } t \geq 0. \end{cases}$$

Tabella 2		
1	$\dfrac{1}{s}$	5
t	$\dfrac{1}{s^2}$	6
t^k	$\dfrac{k!}{s^{k+1}}$	7
a^{bt}	$\dfrac{1}{s-b\log a}$	8

Attenzione, le funzioni a sinistra delle trasformate devono intendersi uguali a 0 per $t<0$, cioè $f(t) \;\rightarrow\; \widehat{f}(s)$ in realtà è $u(t)f(t) \;\rightarrow\; \widehat{f}(s)$ dove $u(t)$ è la funzione di Heaviside.

- Definizione della funzione di Heaviside

$$u(t)=\begin{cases} 0 & \text{se } t<0;\\ 1 & \text{se } t\geq 0.\end{cases}$$

- Trasformata (assumendo $\mathrm{RE}\,(s)>0$):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{u\right\}(s)=\widehat{u}(s) &= \int_{0^-}^{+\infty} u(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_{0^-}^{+\infty} e^{-st}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_{0^-}^{+\infty} = \frac{1}{s}\end{aligned}$$

- Definizione della funzione di crescita lineare

$$t_+ = t\,u(t)$$

- Trasformata (assumendo $\mathrm{RE}\,(s)>0$):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{t_+\right\}(s)=\widehat{t_+}(s) &= \int_{0^-}^{+\infty} t\,u(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_{0^-}^{+\infty} te^{-st}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[-\frac{t}{s}e^{-st}\right]_{0^-}^{+\infty} + \frac{1}{s}\int_{0^-}^{+\infty} e^{-st}\,\mathrm{d}t \\ &= 0+\frac{1}{s}\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_{0^-}^{+\infty} \\ &= \frac{1}{s^2}\end{aligned}$$

- Definizione della funzione di crescita polinomale

$$t_+^k = t^k\,u(t)$$

- Trasformata (assumendo $\mathrm{RE}\,(s)>0$):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{t_+^k\right\}(s)=\widehat{t_+^k}(s) &= \int_{0^-}^{+\infty} t^k\,u(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_{0^-}^{+\infty} t^k e^{-st}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[-\frac{t^k}{s}e^{-st}\right]_{0^-}^{+\infty} + \frac{k}{s}\int_{0^-}^{+\infty} t^{k-1}e^{-st}\,\mathrm{d}t \\ &= 0+\frac{k}{s}\,\widehat{t_+^{k-1}}(s)\end{aligned}$$

- Usando l'induzione e tenendo conto che $\widehat{t_+}(s)=\dfrac{1}{s^2}$ si ha

$$\widehat{t_+^k}(s)=\frac{k!}{s^{k+1}}$$

- Definizione della funzione di crescita esponenziale

$$v(t) = a^{bt}\, u(t)$$

- Trasformata (assumendo $\mathrm{Re}\,(s) > b \log a$):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{a^{bt}\right\}(s) &= \int_{0^-}^{+\infty} a^{bt}\, u(t) e^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_{0^-}^{+\infty} a^{bt} e^{-st}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{0^-}^{+\infty} e^{bt\log a} e^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_{0^-}^{+\infty} e^{(b\log a - s)t}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{1}{(b\log a - s)} e^{(b\log a - s)t}\right]_{0^-}^{+\infty} \\
&= \frac{1}{s - b\log a}
\end{aligned}$$

trasformazione della derivata prima (1/2)

Teorema (Laplace trasformata della derivata prima)

Sia $f(t)$ di ordine esponenziale con derivata generalmente continua. Allora la trasformata della derivata prima diventa:

$$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\}(s) = s\widehat{f}(s) - f(0^+)$$

(assumiamo che $f(t) = 0$ per $t \leq 0$)

Derivazione: Sia $\mathrm{Re}\,(s) > 0$ e $\beta > 0$:

$$\begin{aligned}
\int_{\beta}^{+\infty} f'(t) e^{-st}\,\mathrm{d}t &= \left[f(t)e^{-st}\right]_{\beta}^{+\infty} + s\int_{\beta}^{+\infty} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t \\
&= -f(\beta)e^{-s\beta} + s\int_{\beta}^{+\infty} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

trasformazione delle derivata prima (2/2)

da cui abbiamo

$$\begin{aligned}
\int_{-\epsilon}^{+\infty} f'(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t &= \lim_{\beta\to 0}\left[\int_{-\epsilon}^{0} f'(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t + \int_{\beta}^{+\infty} f'(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t\right] \\
&= \lim_{\beta\to 0}\left[-f(\beta)e^{-s\beta} + s\int_{\beta}^{+\infty} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t + 0\right] \\
&= -f(0^+) + s\int_{0^+}^{+\infty} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

poiché $f(t) = 0$ per $t \leq 0$ abbiamo $\int_{-\epsilon}^{0} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t = 0$ e quindi

$$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\}(s) = -f(0^+) + s\int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t.$$

trasformazione della derivata k-esima

Teorema (Laplace trasformata della derivata k-esima)

Sia $f(t)$ con le sue derivate fino alla $k-1$ esima di ordine esponenziale e la derivata k esima generalmente continua. Allora la trasformata della derivata k-esima diventa:

$$\mathcal{L}\left\{f^{(k)}(t)\right\}(s) = s^k\widehat{f}(s) - \sum_{i=0}^{k-1} s^i f^{(k-i-1)}(0^+).$$

(assumiamo che $f(t) = 0$ per $t \leq 0$)

Derivazione: La derivazione è del tutto analoga alla derivazione per la derivata prima applicando k volte l'integrazione per parti.

trasformazione dell'integrale

Teorema (Laplace trasformata dell integrale)

Sia $f(t)$ generalmente continua, e $g(t)$ definita come segue

$$g(t) = \int_0^t f(z)\,\mathrm{d}z$$

la trasformata $\mathcal{L}\left\{g(t)\right\}(s) = \widehat{g}(s)$ diventa:

$$\widehat{g}(s) = \frac{1}{s}\widehat{f}(s).$$

Derivazione: Basta applicare la regola di derivazione per la funzione $g(t)$ e osservare che $g'(t) = f(t)$ e $g(0) = 0$.

Valori iniziali e finali

Teorema (Teorema del valore iniziale)

Sia $f(t)$ di ordine esponenziale con derivata generalmente continua allora vale:

$$f(0^+) = \lim_{s\to+\infty} s\widehat{f}(s) \qquad s \in \mathbb{R}$$

Derivazione: Dal teorema 1 applicato a $f'(t)$ abbiamo

$$0 = \lim_{s\to+\infty} \mathcal{L}\left\{f'(t)\right\}(s) = \lim_{s\to+\infty} s\widehat{f}(s) - f(0^+)$$

Teorema (Teorema del valore finale)

Sia $f(t)$ di ordine esponenziale con derivata generalmente continua se esiste il limite $f(+\infty) = \lim_{t\to+\infty} f(t)$ allora vale:

$$f(+\infty) = \lim_{s\to 0} s\widehat{f}(s) \qquad s \in \mathbb{R}$$

Derivazione: Applicato la regola di trasformazione di $f'(t)$ abbiamo

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 0^+} \mathcal{L}\left\{f'(t)\right\}(s) &= \lim_{s\to 0^+} s\widehat{f}(s) - f(0^+) \\
\lim_{s\to 0^+} \mathcal{L}\left\{f'(t)\right\}(s) &= \lim_{s\to 0^+} \int_{0^-}^{\infty} f'(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_{0^-}^{\infty} f'(t) \lim_{s\to 0^+} e^{-st}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{0^-}^{\infty} f'(t)\,\mathrm{d}t = f(+\infty) - f(0^+)
\end{aligned}$$

Il passaggio del limite sotto il segno di integrale si può fare per il teorema della convergenza dominata di Lebesgue.

- Moltiplicazione per t^n

$$\mathcal{L}\left\{t^n f(t)\right\}(s) = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}\widehat{f}(s)$$

- Divisione per t. Sia $g(t) = tf(t)$ allora per la formula precedente

$$\mathcal{L}\left\{g(t)\right\}(s) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s)$$

che può essere scritto come: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{L}\left\{\frac{g(t)}{t}\right\}(s) = -\widehat{g}(s)$ o meglio

$$\mathcal{L}\left\{\frac{g(t)}{t}\right\}(s) = -\int \widehat{g}(s)\,\mathrm{d}s + C = \widehat{h}(s)$$

La costante complessa C va scelta in modo che $\widehat{h}(s)$ soddisfi i teoremi del valore iniziale e finale. Ovviamente $\lim_{t\to 0^+} g(t)/t$ deve esistere ed essere finito.

Teorema (Traformazione di funzioni periodiche)

Sia $f(t+T) = f(t)$ *per* $t > 0$ *allora vale*

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) = \frac{\int_0^T f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t}{1-e^{-sT}}$$

Teorema (Traformazione del prodotto di convoluzione)

Sia $(f \star g)(t)$ *definita come segue:*

$$(f \star g)(t) = \int_0^t f(z)g(t-z)\,\mathrm{d}z$$

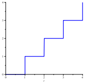
allora vale

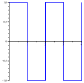
$$\mathcal{L}\left\{f \star g\right\}(s) = \widehat{f}(s)\,\widehat{g}(s)$$

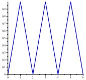
Tabella 3		
$\int_0^t f(z)\,\mathrm{d}z$	$\frac{1}{s}\widehat{f}(s)$	9
$f'(t)$	$s\widehat{f}(s) - f(0^+)$	10
$f''(t)$	$s^2\widehat{f}(s) - f'(0^+) - sf(0^+)$	11
$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}f(t)$	$s^n\widehat{f}(s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^{n-j-1}f^{(j)}(0^+)$	12
$t^n f(t)$	$(-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}\widehat{f}(s)$	13
$(f \star g)(t)$	$\widehat{f}(s)\,\widehat{g}(s)$	14

Tabella 4		
$e^{at}\cos\omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$	15
$e^{at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$	16
$e^{at}\cosh\omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-\omega^2}$	17
$e^{at}\sinh\omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2-\omega^2}$	18
$e^{at}t^n$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	19
$e^{\alpha t} - e^{\beta t}$	$\frac{\alpha-\beta}{(s-\alpha)(s-\beta)}$	20

1. $f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ n & n \leq t < n+1 \end{cases}$
2. $g(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ +1 & 2n \leq t < 2n+1 \\ -1 & 2n+1 \leq t < 2n+2 \end{cases}$
3. $h(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t-2n & 2n \leq t < 2n+1 \\ 2n+2-t & 2n+1 \leq t < 2n+2 \end{cases}$

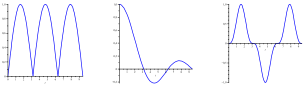






$$\widehat{f}(s) = \frac{e^{-s}}{(e^s-1)\,s};\qquad \widehat{g}(s) = \frac{1}{s}\frac{e^s-1}{e^s+1};\qquad \widehat{h}(s) = \frac{1}{s^2}\frac{e^s-1}{e^s+1}$$

1. $f(t) = |\sin(t)|$
2. $g(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}$
3. $h(t) = \sin(t)^3$



$$\widehat{f}(s) = \frac{1}{1+s^2}\frac{e^{\pi s}+1}{e^{\pi s}-1}\ ; \qquad \widehat{g}(s) = \arctan(s);$$
$$\widehat{h}(s) = \frac{6}{(s^2+1)(s^2+9)}$$

Riferimenti

Joel L. Schiff
The Laplace Transform, theory and applications
Springer-Verlag, 1999.

U. Graf
Applied Laplace Transforms and z-Transforms for Scientists and Engineers
Birkh¨auser, 2004.

Spiegel Murray R.
Laplace transforms
Schaum's outline series, 1965.