# Tabelle per l'esame di Metodi Matematici e Calcolo per Ingegneria

Enrico Bertolazzi

Anno Accademico 2008/2009

| Tabella delle Trasformate: $\sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k}$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\delta_n$ | $1$ | 1 | $f_{n+k}$ | $z^k\left(\widetilde{f}(z)-\sum_{j=0}^{k-1} f_j z^{-j}\right)$ | 7 |
| $\mathbf{1}_n$ | $\dfrac{z}{z-1}$ | 2 | $f_{n-k}$ | $z^{-k}\widetilde{f}(z)$ | 8 |
| $a^n$ | $\dfrac{z}{z-a}$ | 3 | $(f\star g)_n$ | $\widetilde{f}(z)\widetilde{g}(z)$ | 9 |
| $a^n f_n$ | $\widetilde{f}\left(\dfrac{z}{a}\right)$ | 4 | $a^n\sin\omega n$ | $\dfrac{za\sin\omega}{z^2-2za\cos\omega+a^2}$ | 10 |
| $a^n\binom{n}{k}$ | $\dfrac{a^k z}{(z-a)^{k+1}}$ | 5 | $a^n\cos\omega n$ | $\dfrac{z^2-za\cos\omega}{z^2-2za\cos\omega+a^2}$ | 11 |
| $n^k f_n$ | $(-1)^k\left(z\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^k\widetilde{f}(z)$ | 6 | $f_{n-k}n_k$ | $(-1)^k z\dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k}\left(\dfrac{1}{z}\widetilde{f}(z)\right)$ | 12 |

| Tabella delle Trasformate $\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $a\,f(t)+b\,g(t)$ | $a\,\widehat{f}(s)+b\,\widehat{g}(s)$ | 1 | $f''(t)$ | $s^2\widehat{f}(s)-f'(0^+)-s\,f(0^+)$ | 11 |
| $f(at)$ | $\frac{1}{a}\,\widehat{f}\left(\frac{s}{a}\right)\qquad [a>0]$ | 2 | $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}f(t)$ | $s^n\widehat{f}(s)-\sum_{j=0}^{n-1}s^{n-j-1}f^{(j)}(0^+)$ | 12 |
| $e^{at}f(t)$ | $\widehat{f}(s-a)$ | 3 | $t^n f(t)$ | $(-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}\widehat{f}(s)$ | 13 |
| $f(t-a)$ | $e^{-as}\widehat{f}(s)$ | 4 | $(f\star g)(t)$ | $\widehat{f}(s)\,\widehat{g}(s)$ | 14 |
| $1$ | $\frac{1}{s}$ | 5 | $e^{at}\cos\omega t$ | $\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$ | 15 |
| $t$ | $\frac{1}{s^2}$ | 6 | $e^{at}\sin\omega t$ | $\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$ | 16 |
| $t^k$ | $\frac{k!}{s^{k+1}}$ | 7 | $e^{at}\cosh\omega t$ | $\frac{s-a}{(s-a)^2-\omega^2}$ | 17 |
| $a^{bt}$ | $\frac{1}{s-b\log a}$ | 8 | $e^{at}\sinh\omega t$ | $\frac{\omega}{(s-a)^2-\omega^2}$ | 18 |
| $\int_0^t f(z)\,\mathrm{d}z$ | $\frac{1}{s}\widehat{f}(s)$ | 9 | $e^{at}t^n$ | $\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ | 19 |
| $f'(t)$ | $s\widehat{f}(s)-f(0^+)$ | 10 | $e^{\alpha t}-e^{\beta t}$ | $\frac{\alpha-\beta}{(s-\alpha)(s-\beta)}$ | 20 |

| Tabella delle Trasformate: $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda t}\,\mathrm{d}t$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $af(t)+bg(t)$ | $a\tilde{f}(\lambda)+b\tilde{g}(\lambda)$ | 1 | $\sin(\alpha t)$ | $\pi i\big(\delta(\lambda+\alpha)-\delta(\lambda-\alpha)\big)$ | 14 |
| $f(t-a)$ | $e^{-i\lambda a}\tilde{f}(\lambda)$ | 2 | $\cos(\alpha t)$ | $\pi\big(\delta(\lambda+\alpha)+\delta(\lambda-\alpha)\big)$ | 15 |
| $e^{iat}f(t)$ | $\tilde{f}(\lambda-a)$ | 3 | $\frac{1}{\lvert t\rvert}$ | $i\pi-\log(-\lambda^2)$ | 16 |
| $f(\alpha t)$ | $\frac{1}{\alpha}\tilde{f}\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)$ | 4 | $\frac{i}{\pi t}$ | $\mathrm{sign}(\lambda)$ | 17 |
| $f'(t)$ | $(i\lambda)\tilde{f}(\lambda)$ | 5 | $\chi_{[-a,a]}(t)\sin(\alpha t)$ | $i\left(\frac{\sin(a(\lambda+\alpha))}{\lambda+\alpha}-\frac{\sin(a(\lambda-\alpha))}{\lambda-\alpha}\right)$ | 18 |
| $(-it)f(t)$ | $\frac{\mathrm{d}\tilde{f}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}$ | 6 | $\chi_{[-a,a]}(t)\cos(\alpha t)$ | $\frac{\sin(a(\lambda+\alpha))}{\lambda+\alpha}+\frac{\sin(a(\lambda-\alpha))}{\lambda-\alpha}$ | 19 |
| $(f\star g)(t)$ | $\tilde{f}(\lambda)\,\tilde{g}(\lambda)$ | 7 | $u(t)\sin(\alpha t)$ | $i\pi\frac{\delta(\lambda+\alpha)-\delta(\lambda-\alpha)}{2}+\frac{\alpha}{\alpha^2-\lambda^2}$ | 20 |
| $\chi_{[-a,a]}(t)$ | $\frac{2\sin(a\lambda)}{\lambda}$ | 8 | $u(t)\cos(\alpha t)$ | $\pi\frac{\delta(\lambda+\alpha)+\delta(\lambda-\alpha)}{2}+\frac{i\lambda}{\alpha^2-\lambda^2}$ | 21 |
| $1$ | $2\pi\delta(\lambda)$ | 9 | $u(t)e^{-at}\sin(\alpha t)$ | $\frac{\alpha}{a^2+2ia\lambda+\alpha^2-\lambda^2}$ | 22 |
| $\mathrm{sign}(t)$ | $-\frac{2i}{\lambda}$ | 10 | $u(t)e^{-at}\cos(\alpha t)$ | $\frac{a+i\lambda}{a^2+2ia\lambda+\alpha^2-\lambda^2}$ | 23 |
| $\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-k)$ | $2\pi\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(\lambda-2m\pi)$ | 11 | $u(t)e^{-at}$ | $\frac{1}{a+i\lambda}$ | 24 |
| $e^{-\alpha t^2}$ | $\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\lambda^2}{4\alpha}}$ | 12 | $u(t)t\,e^{-at}$ | $\frac{1}{(a+i\lambda)^2}$ | 25 |
| $e^{-\alpha\lvert t\rvert}$ | $\frac{2\alpha}{\alpha^2+\lambda^2}$ | 13 | $u(t)t^k\,e^{-at}$ | $\frac{k!}{(a+i\lambda)^{k+1}}$ | 26 |

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad a_k = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{k\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x, \quad b_k = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x$$

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{\ell} + b_k\sin\frac{k\pi x}{\ell}\right)$$

**Definizione 1 (problema)** *Sia data* $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ *e le mappe di vincoli* $\boldsymbol{g} \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ *e* $\boldsymbol{h} \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. *Problema minimizzare* $f(\boldsymbol{x})$ *soggetta ai vincoli*

$$\begin{aligned} h_k(\boldsymbol{x}) &= 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, m; \\ g_k(\boldsymbol{x}) &\geq 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, p; \end{aligned}$$

**Definizione 2 (Qualificazione dei vincoli LI)** *Dati i vincoli di diseguaglianza* $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ *e di uguaglianza* $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$. *Diremo che nel punto ammissibile* $\boldsymbol{x}^\star$ *sono* qualificati *se i vettori*

$$\{\nabla g_k(\boldsymbol{x}^\star) \;:\; k \in \mathcal{A}(\boldsymbol{x}^\star)\} \cup \{\nabla h_1(\boldsymbol{x}^\star), \nabla h_2(\boldsymbol{x}^\star), \ldots, \nabla h_m(\boldsymbol{x}^\star)\}$$

*sono linearmente indipendenti.*

**Definizione 3 (Qualificazione dei vincoli MF)** *Dati i vincoli di diseguaglianza* $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ *e di uguaglianza* $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$. *Diremo che nel punto ammissibile* $\boldsymbol{x}^\star$ *sono* qualificati *se* non esiste *una combinazione lineare*

$$\sum_{k\in\mathcal{A}(\boldsymbol{x}^\star)}^{m} \alpha_k \nabla g_k(\boldsymbol{x}^\star) + \sum_{k=1}^{m} \beta_k \nabla h_k(\boldsymbol{x}^\star) = \boldsymbol{0}$$

*con* $\alpha_k \geq 0$ *per* $k \in \mathcal{A}(\boldsymbol{x}^\star)$ *ed* $\alpha_k$ *e* $\beta_k$ *non tutti nulli. Cioè non esiste una combinazione lineare non triviale del vettore nullo nella quale* $\alpha_k \geq 0$ *con* $k \in \mathcal{A}(\boldsymbol{x}^\star)$.

**Teorema 1 (Condizioni KKT al primo ordine)** *Sia data* $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ *e le mappe di vincoli* $\boldsymbol{g} \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ *e* $\boldsymbol{h} \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. *Se* $\boldsymbol{x}^\star$ *soddisfa la qualificazione dei vincoli allora condizione necessaria che* $\boldsymbol{x}^\star$ *sia un* minimo locale *è che esistano* $m + p$ *scalari tali che le seguenti condizioni siano soddisfatte*

$$\begin{aligned} \nabla_x \mathcal{L}(\boldsymbol{x}^\star, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) &= \boldsymbol{0}^T \\ h_k(\boldsymbol{x}^\star) &= 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, m; \\ \mu_k^* g_k(\boldsymbol{x}^\star) &= 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, p; \\ \mu_k^* &\geq 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, p; \\ g_k(\boldsymbol{x}^\star) &\geq 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, p; \end{aligned}$$

*dove*

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}) = f(\boldsymbol{x}) - \sum_{k=1}^{p} \mu_k \, g_k(\boldsymbol{x}) - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \, h_k(\boldsymbol{x})$$

**Teorema 2 (Condizioni KKT necessarie al secondo ordine)** *Sia data* $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ *e le mappe di vincoli* $\boldsymbol{g} \in C^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$ *e* $\boldsymbol{h} \in C^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$. *Condizione* necessaria *che* $\boldsymbol{x}^\star$ *sia un* minimo locale *è che* $\boldsymbol{x}^\star$ *soddisfa le KKT al primo ordine e inoltre*

$$\boldsymbol{d}^T \nabla_x^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{x}^\star,\boldsymbol{\lambda}^*,\boldsymbol{\mu}^*)\boldsymbol{d} \;\geq\; 0$$

*per ogni* $\boldsymbol{d}$ *tale che*

$$\begin{aligned} \nabla h_k(\boldsymbol{x}^\star)\boldsymbol{d} &= 0, \qquad && k = 1,2,\ldots,m \\ \nabla g_k(\boldsymbol{x}^\star)\boldsymbol{d} &= 0, \qquad && \textit{se } k \in \mathcal{A}(\boldsymbol{x}^\star) \end{aligned}$$

**Teorema 3 (Condizioni sufficienti al secondo ordine (G.P.McCormick))** *Sia data* $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ *e le mappe di vincoli* $\boldsymbol{g} \in C^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$ *e* $\boldsymbol{h} \in C^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$. *Condizione* sufficiente *che* $\boldsymbol{x}^\star$ *sia un* minimo locale *è che* $\boldsymbol{x}^\star$ *soddisfa le KKT al primo ordine (senza necessità della qualificazione dei vincoli) e inoltre per ogni* $\boldsymbol{d} \neq \boldsymbol{0}$ *tale che*

$$\begin{aligned} \nabla h_k(\boldsymbol{x}^\star)\boldsymbol{d} &= 0, \qquad && k = 1,2,\ldots,m \\ \nabla g_k(\boldsymbol{x}^\star)\boldsymbol{d} &= 0, \qquad && \textit{se } \mu_k > 0 \end{aligned}$$

*deve valere*

$$\boldsymbol{d}^T \nabla_x^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{x}^\star,\boldsymbol{\lambda}^*,\boldsymbol{\mu}^*)\boldsymbol{d} \;>\; 0$$

si noti che non serve la qualificazione dei vincoli per le condizioni sufficienti

**Osservazione 1** *Se vogliamo considerare le condizioni equivalenti per un punto di massimo basta considerare la funzione* $-f(\boldsymbol{x})$ *al posto di* $f(\boldsymbol{x})$ *e riapplicare i teoremi precedenti. Il risultato è mantenendo le stesse notazioni che per un massimo si deve avere* $\mu_k \leq 0$ *e in generale nelle condizioni sugli hessiani le diseguaglianze vanno rovesciate.*