Metodi Matematici e Calcolo per Ingegneria del 15/1/2009

COGNOME | | NOME | | MATRICOLA | |

Firma ____________________

1 Livello difficoltà 2

Calcolare la soluzione del seguente sistema di ricorrenze

$$x_{k+1} + 2\,y_{k+1} = x_k$$

$$x_{k+1} - 2\,y_{k+1} = y_k$$

con dato iniziale $y_0 = x_0 = 1$.

Trasformata Zeta:

$$z\,(x(z) - 1) + 2\,z\,(y(z) - 1) = x(z)$$

$$z\,(x(z) - 1) - 2\,z\,(y(z) - 1) = y(z)$$

Soluzione in Zeta:

$$x(z) = z\frac{4\,z + 3}{4\,z^2 - z - 1}$$

$$y(z) = z\frac{4\,z - 1}{4\,z^2 - z - 1}$$

Soluzione

$$x_k = \frac{7\sqrt{17} + 17}{34}\left(z_2^k - z_1^k\right), \qquad z_1 = \frac{2}{1 + \sqrt{17}}, \qquad z_2 = \frac{2}{1 - \sqrt{17}},$$

$$y_k = \frac{\sqrt{17} - 17}{34}\left(z_2^k - z_1^k\right)$$

Svolgimento: (se necessario usare anche il retro del foglio)

2 Livello difficoltà 2

Dato il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$x'(t) + y''(t) = 1$$
$$y'(t) - x''(t) = 0$$

con dato iniziale $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $x'(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Calcolare:

Trasformata di Laplace:	$\begin{cases} s\,x(s) - 2 + s^2\,y(s) = \dfrac{1}{s} \\ s\,y(s) - s^2\,x(s) + s = 0 \end{cases}$
Soluzione in s:	$x(s) = \dfrac{1+2s+s^3}{s^2(s^2+1)} = \dfrac{2}{s} + \dfrac{1}{s^2} - \dfrac{1+s}{1+s^2}$ $y(s) = \dfrac{1+s}{s(s^2+1)} = \dfrac{1}{s} + \dfrac{1-s}{1+s^2}$
Soluzione in t:	$x(t) = t + 2 - \cos t - \sin t$ $y(t) = 1 - \cos t + \sin t$

Svolgimento: (se necessario usare anche il retro del foglio)

3 Livello difficoltà 1

Data la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} & \text{per } \ x < -\dfrac{\pi}{2} \\ x & \text{per } \ x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{per } \ x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

definita per $x \in (-\pi, \pi)$ ed estesa per periodicitá, calcolare i coefficienti della serie di Fourier:

a_0	$=$	0
a_k	$=$	0
b_k	$=$	$\dfrac{2\sin(k\pi/2) - \pi\, k(-1)^k}{\pi\, k^2} \quad = \quad -\dfrac{(-1)^k}{k} + \dfrac{2\,\pi}{k^2} \times \begin{cases} 0 & \text{se } mod(k,4) = 0 \\ 1 & \text{se } mod(k,4) = 1 \\ 0 & \text{se } mod(k,4) = 2 \\ -1 & \text{se } mod(k,4) = 3 \end{cases}$

Svolgimento: (se necessario usare anche il retro del foglio)

4 Livello difficoltà 2

Data la seguente equazione differenziale ordinaria

$$\begin{cases} y''(x) + 2\,y'(x) = e^{-x} \\ y(0) = 0, \qquad y'(0) = A \end{cases}$$

Calcolare la costante A in modo che

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \frac{1}{2}$$

Trasformata di Laplace:	$s^2\,y(s) - A + 2\,s\,y(s) = \dfrac{1}{1+s}$
Soluzione in s:	$y(s) = \dfrac{1 + A(1+s)}{s(s^2+3s+2)} = \dfrac{1 + A(1+s)}{s(s+1)(s+2)} = \dfrac{1+A}{2\,s} + \dfrac{1-A}{2(s+2)} - \dfrac{1}{1+s}$
Soluzione in x:	$y(x) = \dfrac{1+A}{2} + \dfrac{1-A}{2}e^{-2x} - e^{-x} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}e^{-2x} - e^{-x}$
Costante A:	$A = 0$

Svolgimento: (se necessario usare anche il retro del foglio)

5 Livello difficoltà 4

Risolvere il seguente problema di minimo vincolato

$$f(x, y) = x\,(y-1),$$

$$\text{Vincoli:} \qquad x^2 + y^2 \leq 1, \qquad x + \frac{1}{2} \leq y,$$

Suggerimento: usare le condizioni KKT al primo ordine per trovate i candidati a essere punti di minimo e per risolvere il sistema non lineare risultante mettere a zero alternativamente i moltiplicatori.

Sistema non lineare KKT al primo ordine:

$$\begin{bmatrix} y - 1 + 2\,\mu_1\,x + \mu_2 = 0 \\ x + 2\,\mu_1\,y - \mu_2 = 0 \\ \mu_1(1 - x^2 - y^2) = 0 \\ \mu_2(y - x - 1/2) = 0 \end{bmatrix}$$

Punti candidati ad essere minimi:

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 1 \\ \mu_1 &= 0 \\ \mu_2 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &= \frac{1}{4} \\ y &= \frac{3}{4} \\ \mu_1 &= 0 \\ \mu_2 &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Discussione dei punti stazionari:

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad K_1^T H_1 K_1 = (\,0\,), \quad \text{NON classificabile}$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad K_2^T H_2 K_2 = (\,2\,), \quad \text{OK, Minimo}$$

Svolgimento: (se necessario usare anche il retro del foglio)