Metodi Matematici e Calcolo per Ingegneria del 6/2/2009

Cognome		Nome		Matricola	

Firma ______________________

1 Livello difficoltà 2

Calcolare la soluzione del seguente sistema di ricorrenze

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + 1, \\ y_{k+1} &= y_k + k, \\ x_{k+1} + y_{k+1} + w_{k+1} &= w_k, \end{aligned}$$

con dato iniziale $y_0 = x_0 = 1$, $w_0 = 0$.

Trasformata Zeta:	$z\,(x(z) - 1) = x(z) + \dfrac{z}{z-1}$ $z\,(y(z) - 1) = y(z) + \dfrac{z}{(z-1)^2}$ $z\,(x(z) + y(z) + w(z)) = w(z) + 2\,z$
Soluzione in Zeta:	$x(z) = \dfrac{z^2}{(z-1)^2}$ $y(z) = \dfrac{z(z^2 - 2z + 2)}{(z-1)^3}$ $w(z) = -\dfrac{z(3z^2 - 4z + 2)}{(z-1)^4}$
Soluzione	$x_k = k + 1$ $y_k = \dfrac{1}{2}k^2 - \dfrac{1}{2}k + 1$ $w_k = -\dfrac{1}{6}k^3 - \dfrac{1}{2}k^2 - \dfrac{7}{3}k$

Svolgimento: (se necessario usare anche il retro del foglio)

2 Livello difficoltà 2

Dato il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$x''(t) + y''(t) = e^t$$
$$x''(t) - y''(t) = \sin t$$

con dato iniziale $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $x'(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Calcolare:

Trasformata di Laplace:	$\begin{cases} s^2\, x(s) - s + s^2\, y(s) - 1 = \dfrac{1}{s-1} \\ s^2\, x(s) - s - s^2\, y(s) + 1 = \dfrac{1}{s^2+1} \end{cases}$
Soluzione in s:	$x(s) = \dfrac{2s^3 - 2s^2 + 3s - 1}{2\, s(s-1)(s^2+1)} = \dfrac{1}{2s} + \dfrac{1}{2(s-1)} - \dfrac{1}{2(s^2+1)}$ $y(s) = \dfrac{2s^2 - s + 1}{2\, s(s-1)(s^2+1)} = -\dfrac{1}{2s} + \dfrac{1}{2(s-1)} + \dfrac{1}{2(s^2+1)}$
Soluzione in t:	$x(t) = \dfrac{1 + e^t - \sin t}{2}$ $y(t) = \dfrac{\sin t + e^t - 1}{2}$

Svolgimento: (se necessario usare anche il retro del foglio)

3 Livello difficoltà 2

Data la seguente equazione differenziale ordinaria

$$\begin{cases} y'''(x) - y'(x) = e^{-x} \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = A \end{cases}$$

calcolare la costante A in modo che

$$\lim_{x \to \infty} \frac{y(x)}{e^x} = 1$$

Trasformata di Laplace: $s^3\, y(s) - A - \, s\, y(s) = \dfrac{1}{1+s}$
Soluzione in s: $y(s) = \dfrac{1 + A(1+s)}{s(s-1)(1+s)^2} = \dfrac{1}{2(1+s)^2} + \dfrac{1+2\,A}{4(s-1)} + \dfrac{3+2\,A}{4(s+1)} - \dfrac{A+1}{s}$
Soluzione in x: $y(x) = \dfrac{3+2(A+x)}{4} e^{-x} + \dfrac{2A+1}{4} e^{x} - A - 1 = \dfrac{3+x}{2} e^{-x} + e^{x} - \dfrac{5}{2}$
Costante A: $A = \dfrac{3}{2}$

Svolgimento: (se necessario usare anche il retro del foglio)

4 Livello difficoltà 2

Data la seguente equazione differenziale ordinaria calcolare l'indice mediante riduzione dello stesso

$$\begin{aligned} y'(t) + x(t) &= e^t, \\ z'(t) + y(t) &= \sin(t), \\ z(t) &= h(t). \end{aligned}$$

Indice:	3
DAE ridotta ad ODE:	$$\begin{aligned} x'(t) + x(t) &= 2e^t + \sin t - \cos(t) + h'''(t), \\ y'(t) + x(t) &= e^t, \\ z'(t) + y(t) &= \sin(t). \end{aligned}$$

Svolgimento: (se necessario usare anche il retro del foglio)

5 Livello difficoltà 4

Trovare i candidati a essere punti di minimo per il seguente problema di minimo vincolato

$$f(x,y,z) = z + x\,y,$$

$$\text{Vincoli:} \qquad x^2 + y^2 \leq 1, \qquad x \leq y + z,$$

Dire se il punto

$$x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad z = -\sqrt{2}, \quad \lambda = \frac{1-\sqrt{2}}{2}, \quad \mu = 1$$

Soddisfa le KKT al primo e secondo ordine e la qualificazione dei vincoli.
Suggerimento: usare le condizioni KKT al primo ordine per trovate i candidati a essere punti di minimo e per risolvere il sistema non lineare risultante mettere a zero alternativamente i moltiplicatori.

Sistema non lineare KKT al primo ordine:

$$\begin{bmatrix} y + 2\lambda x + \mu = 0 \\ x + 2\lambda y - \mu = 0 \\ 1 - \mu = 0 \\ \lambda(1 - x^2 - y^2) = 0 \\ \mu(y + z - x) = 0 \end{bmatrix}$$

Punti candidati ad essere minimi:

Solo quello incorniciato è un candidato valido

$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$x = 1$	$x = 1$	$x = 0$	$x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
$y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$y = -1$	$y = 0$	$y = -1$	$y = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$z = \sqrt{2}$	$z = 2$	$z = 1$	$z = 1$	$z = -\sqrt{2}$
$\lambda = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$	$\lambda = 0$	$\lambda = -\frac{1}{2}$	$\lambda = -\frac{1}{2}$	$\lambda = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$
$\mu = 1$	$\mu = 1$	$\mu = 1$	$\mu = 1$	$\mu = 1$

Il punto non è classificabile $\lambda < 0$

Svolgimento: (se necessario usare anche il retro del foglio)