Metodi Matematici e Calcolo per Ingegneria del 23/6/2009

COGNOME		NOME		MATRICOLA	

Firma ____________________

1 Livello difficoltà 2

Calcolare la soluzione del seguente sistema di ricorrenze

$$x_{k+1} + y_{k+1} = x_k + y_k$$
$$x_{k+1} - y_{k+1} = x_k + k$$

con dato iniziale $y_0 = x_0 = 1$.

Trasformata Zeta:	$(z-1)(x(x) + y(z)) = 2z$ $(z-1)x(z) - z\,y(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$
Soluzione in Zeta:	$x(z) = z\frac{2z^2 - 2z + 1}{(2z-1)(z-1)^2} = \frac{2z}{2z-1} + \frac{z}{(z-1)^2}$ $y(z) = z\frac{2z^2 - 4z + 1}{(2z-1)(z-1)^2} = \frac{2z}{z-1} - \frac{z}{(z-1)^2} - \frac{2z}{2z-1}$
Soluzione	$x_k = 2 - k - \left(\frac{1}{2}\right)^k$ $y_k = k + \left(\frac{1}{2}\right)^k$

Svolgimento: (se necessario usare anche il retro del foglio)

2 Livello difficoltà 2

Dato il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$y''(t) + y(t) = 1$$
$$x''(t) + y(t) = \sin t$$

con dato iniziale $x(0) = 0$, $y(0) = 2$, $x'(0) = 1$, $y'(0) = 3$. Calcolare:

Trasformata di Laplace:	$\begin{cases} y(s) + s^2 y(s) - 3 - 2s = \dfrac{1}{s} \\ \\ y(s) + s^2\, x(s) - 1 = \dfrac{1}{1+s^2} \end{cases}$
Soluzione in s:	$x(s) = \dfrac{s^3 - 2s^2 - s - 1}{s^3(s^2+1)} = \dfrac{s+2}{s^2+1} - \dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s^2} - \dfrac{1}{s^3}$ $y(s) = \dfrac{2s^2 + 3s + 1}{s(s^2+1)} = \dfrac{s+3}{s^2+1} + \dfrac{1}{s}$
Soluzione in t:	$x(t) = \cos t + 2\sin t - 1 - t - \dfrac{t^2}{2}$ $y(t) = 1 + \cos t + 3\sin t$

Svolgimento: (se necessario usare anche il retro del foglio)

3 Livello difficoltà 1

Data la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 & x < -\frac{\pi}{2} \\ x^2 & x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Definita per $x \in (-\pi, \pi)$ ed estesa per periodicitá, calcolare i coefficienti della serie di Fourier:

a_0	$=$	$\frac{\pi^2}{3}$
a_k	$=$	$\frac{2k\cos(k\pi/2) - 4\sin(k\pi/2)}{\pi k^3} = \frac{2}{\pi k^3} \begin{cases} k & \text{se } mod(k,4) = 0 \\ -2 & \text{se } mod(k,4) = 1 \\ -k & \text{se } mod(k,4) = 2 \\ 2 & \text{se } mod(k,4) = 3 \end{cases}$
b_k	$=$	0

Svolgimento: (se necessario usare anche il retro del foglio)

4 Livello difficoltà 2

Data la seguente equazione differenziale ordinaria

$$\begin{cases} y''(x) + y'(x) - 2y(t) = 1 \\ y(0) = 0, \qquad y'(0) = A \end{cases}$$

Calcolare la costante A in modo che

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{e^x} = 1$$

Trasformata di Laplace:	$s^2\, y(s) - A + s\, y(s) - 2y(s) = \dfrac{1}{s}$
Soluzione in s:	$y(s) = \dfrac{1 + As}{s(s^2 + s - 2)}$
Soluzione in x:	$y(x) = \dfrac{1+A}{3} e^x + \dfrac{1-2A}{6} e^{-2x} - \dfrac{1}{2} = e^x - \dfrac{1}{2} e^{-2x} - \dfrac{1}{2}$
Costante A:	$A = 2$

Svolgimento: (se necessario usare anche il retro del foglio)

5 Livello difficoltà 4

Trovare i candidati a essere punti di minimo per il seguente problema di minimo vincolato

$$f(x,y) = x - y^2,$$

$$\text{Vincoli:} \qquad x + y \geq 0, \qquad x^2 + y^2 \leq 1,$$

Dire se il punto

$$x = -\frac{1}{2}, \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \mu_1 = 0, \quad \mu_2 = 1$$

Soddisfa le KKT al primo e secondo ordine e la qualificazione dei vincoli.
Suggerimento: usare le condizioni KKT al primo ordine per trovate i candidati a essere punti di minimo e per risolvere il sistema non lineare risultante mettere a zero alternativamente i moltiplicatori.

Sistema non lineare KKT al primo ordine:	$\begin{bmatrix} 1 - \mu_1 + 2\,\mu_2\,x = 0 \\ -2\,y - \mu_1 + 2\,\mu_2\,y = 0 \\ \mu_1(x+y) = 0 \\ \mu_2(1 - x^2 - y^2) = 0 \end{bmatrix}$
Punti candidati ad essere minimi:	$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \mu_1 &= \frac{\sqrt{2}+1}{2} \\ \mu_2 &= \frac{2-\sqrt{2}}{4} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \\ y &= -\frac{1}{2} \\ \mu_1 &= 1 \\ \mu_2 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &= -\frac{1}{2} \\ y &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \mu_1 &= 0 \\ \mu_2 &= 1 \end{aligned}$

$H_1 = \begin{pmatrix} (2-\sqrt{2})/2 & 0 \\ 0 & -(2+\sqrt{2})/2 \end{pmatrix}$,	$K_1 = (\ )$,	$K_1^T H_1 K_1 = ()$,	NON classificabile
$H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$,	$K_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,	$K_2^T H_2 K_2 = (\,-2\,)$,	NO
$H_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,	$K_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$,	$K_3^T H_3 K_3 = (\,6\,)$,	OK, Minimo

Svolgimento: (se necessario usare anche il retro del foglio)