Metodi Matematici e Calcolo per Ingegneria del 27/7/2009

COGNOME		NOME		MATRICOLA	

Firma ____________________

1 Livello difficoltà 2

Calcolare la soluzione del seguente sistema di ricorrenze

$$x_{k+2} = x_k + 2,$$
$$y_{k+1} = x_k - y_k,$$

con dato iniziale $y_0 = x_0 = 1$, $x_1 = 1$.

Trasformata Zeta:	$(z^2 - 1)x(z) = z + z^2 + \dfrac{2\,z}{z-1}$ $z\,y(z) - z = x(z) - y(z)$
Soluzione in Zeta:	$x(z) = \dfrac{z(z^2+1)}{(z+1)(z-1)^2} = \dfrac{z}{2(z-1)} + \dfrac{z}{2(z+1)} + \dfrac{z}{(z-1)^2}$ $y(z) = \dfrac{z(z^3 - z + 2)}{(z+1)^2(z-1)^2} = \dfrac{z}{2(z+1)^2} + \dfrac{z}{(z+1)} + \dfrac{z}{2(z-1)^2}$
Soluzione	$x_k = \dfrac{1 + (-1)^k}{2} + k$ $y_k = (-1)^k + \dfrac{k}{2}(1 - (-1)^k)$

Svolgimento: (se necessario usare anche il retro del foglio)

2 Livello difficoltà 2

Dato il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$x''(t) + y''(t) = \cos t$$

$$x''(t) - y(t) = \sin t$$

con dato iniziale $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $x'(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Calcolare:

Trasformata di Laplace:	$\begin{cases} s^2\,x(s) - s + s^2\,y(s) - 1 = \dfrac{s}{s^2+1} \\ s^2\,x(s) - s - y(s) = \dfrac{1}{s^2+1} \end{cases}$
Soluzione in s:	$x(s) = \dfrac{1+2s+2s^2+2s^3+s^5}{s^2(s^2+1)^2} = \dfrac{2}{s} + \dfrac{1}{s^2} - \dfrac{1+s}{s^2+1} + \dfrac{1-s}{(s^2+1)^2}$ $y(s) = \dfrac{s(1+s)}{(s^2+1)^2} = \dfrac{1}{1+s^2} + \dfrac{s-1}{(s^2+1)^2}$
Soluzione in t:	$x(t) = 2 + t - \dfrac{(1+t)\sin t - (2+t)\cos t}{2}$ $y(t) = \dfrac{t\cos t + (1+t)\sin t}{2}$

Svolgimento: (se necessario usare anche il retro del foglio)

3 Livello difficoltà 2

Data la seguente equazione differenziale ordinaria

$$\begin{cases} y'''(x) - y''(x) = x \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = A \end{cases}$$

calcolare la costante A in modo che

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{e^x} = \frac{1}{2}$$

Trasformata di Laplace: $s^3\, y(s) - A - \, s^2\, y(s) = \dfrac{1}{s^2}$
Soluzione in s: $y(s) = \dfrac{As^2+1}{s^4(s-1)} = -\dfrac{A+1}{s} - \dfrac{A+1}{s^2} - \dfrac{1}{s^3} - \dfrac{1}{s^4}$
Soluzione in x: $y(x) = (1+A)(e^x - x - 1) - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} = +\dfrac{1}{2}(e^x - x^2 - x - 1) - \dfrac{x^3}{6}$
Costante A: $A = -\dfrac{1}{2}$

Svolgimento: (se necessario usare anche il retro del foglio)

4 Livello difficoltà 2

Data la seguente equazione differenziale ordinaria calcolare l'indice mediante riduzione dello stesso

$$
\begin{aligned}
y'(t) + x(t) &= f(t), \\
z'(t) + y(t) &= g(t), \\
z(t) &= h(t).
\end{aligned}
$$

Indice: 3

DAE ridotta ad ODE:
$$
\begin{aligned}
x'(t) &= f'(t) - g''(t) + h'''(t), \\
y'(t) + x(t) &= f(t), \\
z'(t) + y(t) &= g(t).
\end{aligned}
$$

Svolgimento: (se necessario usare anche il retro del foglio)

5 Livello difficoltà 4

Trovare i candidati a essere punti di minimo per il seguente problema di minimo vincolato

$$f(x,y,z) = 1 + x^2 + y - z,$$

$$\text{Vincoli:} \qquad z = y^2, \qquad z \leq x + y,$$

Dire se il punto

$$x = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{1+\sqrt{3}}{2}, \quad z = y^2, \quad \lambda = 0, \quad \mu = 1$$

Soddisfa le KKT al primo e secondo ordine e la qualificazione dei vincoli.
Suggerimento: usare le condizioni KKT al primo ordine per trovate i candidati a essere punti di minimo e per risolvere il sistema non lineare risultante mettere a zero alternativamente i moltiplicatori.

Sistema non lineare KKT al primo ordine:

$$\begin{bmatrix} 2\,x - \mu = 0 \\ 1 - 2\,\lambda\,y - \mu = 0 \\ -1 + \lambda + \mu = 0 \\ y^2 - z = 0 \\ \mu(x + y - z) = 0 \end{bmatrix}$$

Punti candidati ad essere minimi:

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= \frac{1}{2} \\ z &= \frac{1}{4} \\ \lambda &= 1 \\ \mu &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \\ y &= \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ z &= y^2 \\ \lambda &= 0 \\ \mu &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \\ y &= \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ z &= y^2 \\ \lambda &= 0 \\ \mu &= 1 \end{aligned}$$

$$H_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad K_1^T H_1 K_1 = (\,-2\,), \quad \text{NO}$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad K_2^T H_2 K_2 = (\,6\,), \quad \text{OK, MINIMO}$$

$$H_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \\ \sqrt{3}-1 \end{pmatrix}, \quad K_3^T H_3 K_3 = (\,6\,), \quad \text{OK, MINIMO}$$

Svolgimento: (se necessario usare anche il retro del foglio)