Metodi Matematici e Calcolo per Ingegneria del 11/9/2009

Cognome | | Nome | | Matricola | |

Firma ______________________

1 Livello difficoltà 2

Calcolare la soluzione della seguente ricorrenza

$$x_{k+3} - 7\,x_{k+1} + 6\,x_k = 1$$

con dato iniziale $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Suggerimento $x^3 - 7\,x + 6 = (x-2)(x+3)(x-1)$.

Trasformata Zeta: $(z^3 - 7\,z + 6)x(z) - z^2 - 2\,z = \dfrac{z}{z-1}$

Soluzione in Zeta: $x(z) = \dfrac{z(z^2+z-1)}{(z-1)^2(z-2)(z+3)} = \dfrac{z}{z-2} - \dfrac{15\,z}{16(z-1)} - \dfrac{z}{16(z+3)} - \dfrac{z}{4(z-1)^2}$

Soluzione $x_k = 2^k - \dfrac{4\,k + (-3)^k + 15}{16}$

Svolgimento: (se necessario usare anche il retro del foglio)

2 Livello difficoltà 2

Dato il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$y''(t) + x(t) = 1$$

$$x''(t) + y(t) = 1$$

con dato iniziale $x(0) = 0$, $y(0) = 2$, $x'(0) = 1$, $y'(0) = 3$. Calcolare:

Trasformata di Laplace:	$\begin{cases} x(s) + s^2 y(s) - 3 - 2\,s = \dfrac{1}{s} \\ y(s) + s^2\,x(s) - 1 = \dfrac{1}{s} \end{cases}$
Soluzione in s:	$x(s) = \dfrac{s^2 - 2\,s - 1}{s(s-1)(s^2+1)} = \dfrac{2}{s^2+1} - \dfrac{1}{s-1} + \dfrac{1}{s}$ $y(s) = \dfrac{2\,s^3 + s^2 - 1}{s(s-1)(s^2+1)} = \dfrac{2}{s^2+1} + \dfrac{1}{s-1} + \dfrac{1}{s}$
Soluzione in t:	$x(t) = 1 + 2\sin t - e^t$ $y(t) = 1 + 2\sin t + e^t$

Svolgimento: (se necessario usare anche il retro del foglio)

3 Livello difficoltà 1

Data la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < -\frac{\pi}{2} \\ \cos x & x \in \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \Big) \\ 0 & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Definita per $x \in (-\pi, \pi)$ ed estesa per periodicitá, calcolare i coefficienti della serie di Fourier:

a_0	$=$	$\frac{2}{\pi}$
a_k	$=$	$\frac{2\cos(k\pi/2)}{(1-k^2)\pi} = \frac{2}{(1-k^2)\pi} \begin{cases} 1 & \text{se} \ \ mod(k,4) = 0 \\ 0 & \text{se} \ \ mod(k,4) = 1 \\ -1 & \text{se} \ \ mod(k,4) = 2 \\ 0 & \text{se} \ \ mod(k,4) = 3 \end{cases}$
b_k	$=$	0

Svolgimento: (se necessario usare anche il retro del foglio)

4 Livello difficoltà 2

Data la seguente equazione differenziale ordinaria

$$\begin{cases} y''''(x) + 5\,y''(x) + 4\,y(t) = 1 \\ y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0, \qquad y''(0) = 0, \qquad y'''(0) = A \end{cases}$$

Calcolare la costante A in modo che

$$y(\pi/2) = 0$$

Trasformata di Laplace:	$(s^4 + 5\,s^2 + 4)\,y(s) - A = \frac{1}{s}$
Soluzione in s:	$y(s) = \frac{As + 1}{s(s^4 + 5s^2 + 4)} = \frac{1}{3}\,\frac{A - s}{s^2 + 1} + \frac{1}{12}\,\frac{s - 4\,A}{s^2 + 4} + \frac{1}{4\,s}$
Soluzione in x:	$y(x) = -\frac{1}{3}\cos x + \frac{A}{3}\sin x + \frac{1}{12}\cos(2x) - \frac{A}{6}\sin(2x) + \frac{1}{4}$ $y(x) = -\frac{1}{3}\cos x - \frac{1}{6}\sin x + \frac{1}{12}\cos(2x) + \frac{1}{12}\sin(2x) + \frac{1}{4}$
Costante A:	$A = -\frac{1}{2}$

Svolgimento: (se necessario usare anche il retro del foglio)

5 Livello difficoltà 4

Trovare i candidati a essere punti di minimo per il seguente problema di minimo vincolato

$$f(x, y, z) = x\,y + z,$$

$$\text{Vincoli:} \qquad x + y \le z, \qquad x^2 + y^2 \le 1,$$

Dire se il punto

$$x = -1, \quad y = 0, \quad z = -1, \quad \mu_1 = 1, \quad \mu_2 = \frac{1}{2}$$

soddisfa le KKT al primo e secondo ordine e la qualificazione dei vincoli.
Suggerimento: usare le condizioni KKT al primo ordine per trovate i candidati a essere punti di minimo e per risolvere il sistema non lineare risultante mettere a zero alternativamente i moltiplicatori.

Sistema non lineare KKT al primo ordine:	$\begin{bmatrix} y + \mu_1 + 2\,\mu_2\,x = 0 \\ x + \mu_1 + 2\,\mu_2\,y = 0 \\ 1 - \mu_1 = 0 \\ \mu_1(z - x - y) = 0 \\ \mu_2(1 - x^2 - y^2) = 0 \end{bmatrix}$
Punti candidati ad essere minimi:	$\begin{array}{rcl} x &=& -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y &=& -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ z &=& -\sqrt{2} \\ \mu_1 &=& 1 \\ \mu_2 &=& \frac{\sqrt{2}-1}{2} \end{array}$ $\quad \begin{array}{rcl} x &=& -1 \\ y &=& 0 \\ z &=& -1 \\ \mu_1 &=& 1 \\ \mu_2 &=& \frac{1}{2} \end{array}$ $\quad \begin{array}{rcl} x &=& 0 \\ y &=& -1 \\ z &=& -1 \\ \mu_1 &=& 1 \\ \mu_2 &=& \frac{1}{2} \end{array}$

$$H_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2}-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad K_1^T H_1 K_1 = (2\sqrt{2} - 4), \quad \text{NO}$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad K_2^T H_2 K_2 = (\,1\,), \quad \text{OK, MINIMO}$$

$$H_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad K_3^T H_3 K_3 = (\,1\,), \quad \text{OK, Minimo}$$

Svolgimento: (se necessario usare anche il retro del foglio)