

# Serie di Fourier

(Metodi Matematici e Calcolo per Ingegneria)

Enrico Bertolazzi

DIMS – Università di Trento

anno accademico 2008/2009

# Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830)



- 1 La serie di Fourier
- 2 Convergenza della serie di Fourier
- 3 La serie di Fourier per una funzione di periodo  $2\ell$ 
  - La serie di Fourier scritta con esponenziali complessi
  - La serie di Fourier scritta con coseni e angoli di fase
- 4 Il fenomeno di Gibbs
  - Alcuni esempi di serie di Fourier

# Funzioni periodiche

- Dato  $T > 0$  si dice che  $f(x)$  ( $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ) è periodica di periodo  $T$  se vale

$$f(t + T) = f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

ovviamente poiché

$$f(t) = f(t + T) = f(t + 2T) = \dots = f(t + nT) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$f(t)$  è anche periodica di periodo  $kT$  per ogni  $k > 0$  intero.

- Data una funzione  $g(t)$  definita nell'intervallo  $[a, b)$  possiamo estenderla ad una funzione periodica di periodo  $b - a$  come segue

$$f(t) = g(t - n(b - a)), \quad n(b - a) \leq t < (n + 1)(b - a)$$

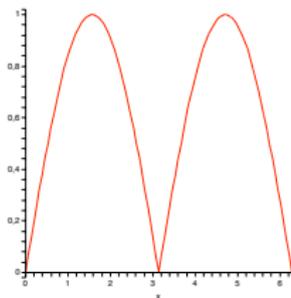
dove  $n \in \mathbb{Z}$ .

# Esempi di periodiche

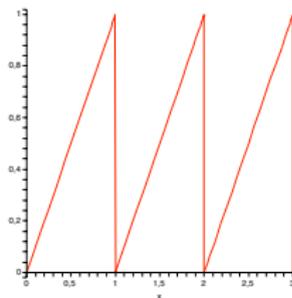
- Le funzioni trigonometriche  $\sin t$  e  $\cos t$  sono ovviamente periodiche di periodo  $2\pi$

$$\sin t = \sin(t + 2\pi), \quad \cos t = \cos(t + 2\pi)$$

- $|\sin(t)| =$



- $x - [x] =$



- Una famiglia di funzioni periodiche di periodo  $2\pi$  è la seguente

$$S_N(t) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^N (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

- Le funzioni periodiche  $\cos kt$  e  $\sin kt$  e la funzione costante sono **ortogonali** rispetto al prodotto scalare di  $L_2(0, 2\pi)$  cioè:

$$\int_0^{2\pi} \sin mt \cos nt \, dt = 0, \quad n, m \geq 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin mt \sin nt \, dt = 0, \quad n, m \geq 1, \quad n \neq m$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mt \cos nt \, dt = 0, \quad n, m \geq 1, \quad n \neq m$$

inoltre

$$\int_0^{2\pi} (\sin mt)^2 \, dt = \int_0^{2\pi} (\cos mt)^2 \, dt = \pi, \quad n \geq 1.$$

- La verifica della ortogonalità può essere fatta facilmente usando le formule

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

- Se consideriamo le formule esponenziali per seno e coseno

$$\sin t = i \frac{e^{-it} - e^{it}}{2} \quad \cos t = \frac{e^{-it} + e^{it}}{2}$$

la verifica è ancora più facile.



- Se consideriamo gli spazi vettoriali  $V_N$

$$V_N = \text{SPAN}\{1/\sqrt{2}, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots, \cos Nt, \sin Nt\}$$

allora  $S_N(t) \in V_N$  e il vettore

- Quindi il vettore di  $2N + 1$  coordinate

$$(a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_N, b_N)^T$$

determina univocamente  $S_N(t)$

- C'è quindi una corrispondenza 1 – 1 tra  $V_N$  e lo spazio vettoriale  $\mathbb{R}^{2N+1}$
- La condizione di ortogonalità delle funzioni seno e coseno permette di stabilire che questa corrispondenza è una **isometria**.



- Definiamo il prodotto scalare su  $V_N$  come segue:

$$(f, g) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t) dt$$

- se consideriamo

$$f(t) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^N (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

$$g(t) = \frac{a'_0}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^N (a'_k \cos kt + b'_k \sin kt)$$

otteniamo

$$(f, g) = a_0 a'_0 + \sum_{k=1}^n (a_k a'_k + b_k b'_k)$$

- Definiamo ora la mappa  $\Phi : V_N \rightarrow \mathbb{R}^{2N+1}$  come segue: data  $f(t)$

$$f(t) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^N (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

$\Phi(f) = \mathbf{f}$  dove

$$\mathbf{f} = (a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_N, b_N)^T$$

- Ovviamente dato  $\mathbf{f} = (f_0, f_1, \dots, f_{2N})^T$

$$\Phi^{-1}(\mathbf{f})(t) = \frac{f_0}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^N (f_{2k-1} \cos kt + f_{2k} \sin kt)$$

- inoltre vale

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} = \Phi(f) \cdot \Phi(g) = (f, g)$$

dove  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} = \sum_{k=0}^{2N} f_k g_k$ , cioè il prodotto scalare di  $\mathbb{R}^{2N+1}$ .



# A che ci serve tutto questo?

Il fatto che  $V_N \equiv \mathbb{R}^{2N+1}$  ci permette di dire:

- Le funzioni  $1/\sqrt{2}$ ,  $\sin kt$ ,  $\cos kt$  sono **vettori** di  $V_N$  ortonormali
- Questi vettori costituiscono una base per  $V_N$
- Consideriamo ora una generica funzione periodica  $g(t)$  di periodo  $2\pi$ , allora potremmo considerare  $g(t)$  appartenente ad uno spazio vettoriale  $V$  che contiene  $V_N$  (cioè  $V_N \subset V$ ).
- Usando la ortonormalità della base di  $V_N$  è immediato costruire una proiezione ortogonale di  $g(t)$  in  $V_N$ : Infatti usando il fatto che  $(g - \pi g)(t)$  deve essere ortogonale a tutti i vettori della base di  $V_N$  otteniamo:

$$(\pi g)(t) = \frac{(g, 1/\sqrt{2})}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^N ((g, \cos kt) \cos kt + (g, \sin kt) \sin kt)$$

- ovviamente se  $g \in V_N$  abbiamo  $g = \pi g$ .



Se consideriamo lo spazio vettoriale  $V_\infty$  definito da

$$f \in V_\infty, \quad f(t) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

ci perdiamo la corrispondenza con lo spazio delle successioni dei numeri reali

$$\{a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_k, b_k, \dots\}$$

perché non tutte le successioni producono una serie convergente per ogni  $t$ .

- Le funzioni  $1/\sqrt{2}$ ,  $\sin kt$ ,  $\cos kt$  sono **vettori** di  $V_\infty$  ortonormali
- Questi vettori **NON** costituiscono una base per  $V_\infty$
- Consideriamo ora una generica funzione periodica  $g(t)$  di periodo  $2\pi$ . Usando il fatto che  $(g - \pi g)(t)$  deve essere ortogonale a tutti i vettori di  $V_\infty$  otteniamo:

$$(\pi g)(t) = \frac{(g, 1/\sqrt{2})}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{\infty} ((g, \cos kt) \cos kt + (g, \sin kt) \sin kt)$$

Le considerazioni precedenti ci permettono di scrivere un gran numero di funzioni periodiche di periodo  $2\pi$  come serie di funzioni

$$f(t) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

ci chiediamo ora:

- Quale classe di funzioni (periodiche) ammette tale rappresentazione come serie di seni e coseni?
- Quando è che questa serie ha senso?
- Le espressioni per i coefficienti  $a_k$  e  $b_k$  che abbiamo derivato nel caso della serie finita sono valide anche per la serie infinita?



# La serie di Fourier

- La serie di Fourier per una funzione periodica  $f(t)$  di periodo  $2\pi$  é la seguente

$$S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

- dove

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt, \quad k = 0, 1, \dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt. \quad k = 1, 2, \dots$$

- **Attenzione:** abbiamo cambiato  $1/\sqrt{2}$  con  $1/2$  in modo che la formula per  $a_0$  sia la stessa per  $a_k$  (infatti  $\cos(0t) = 1$ ). In questo modo la funzione costante è solo ortogonale alle altre.

# Quando converge la serie di Fourier ?

La serie di Fourier può convergere su tutto  $[-\pi, \pi]$  o solo su un sottinsieme (anche vuoto). Quando converge non è detto che converga alla funzione di partenza. Esiste però una classe di funzioni periodiche abbastanza ampia dove le cose vanno bene.

## Definizione (Funzioni continue a tratti)

Una funzione  $f(t)$  definita su  $[a, b]$  è detta *continua a tratti* se:

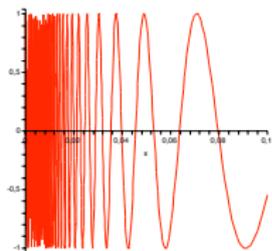
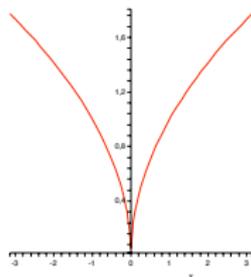
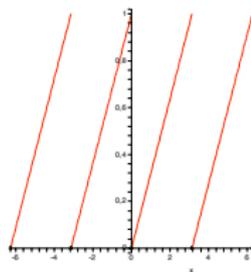
- (i) esiste una suddivisione  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  tale che  $f(t)$  è continua in ogni sotto intervallo  $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .
- (ii) Per ogni intervallo  $I_k$  i limiti  $f(x_k - 0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f(x_k - \epsilon)$  e  $f(x_{k-1} + 0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f(x_{k-1} + \epsilon)$  esistono e sono finiti.

Se  $f(t)$  ha derivata prima e  $f(t)$  con  $f'(t)$  sono continue a tratti la serie di Fourier converge alla funzione (tranne nei punti di discontinuità).

## Definizione (Funzioni regolari a tratti)

Una funzione  $f(t)$  definita su  $[a, b]$  è detta regolare a tratti se esiste la derivata prima su  $[a, b]$  escludendo al più un numero finito di punti. Inoltre  $f(t)$  ed  $f'(t)$  sono continue a tratti.

- La funzione  $\sin(1/x)$  è continua su  $(0, 1]$  ma **non** continua a tratti su  $[0, 1]$  infatti  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sin(1/\epsilon)$  non esiste.
- La funzione  $f(t) = \sqrt{|t|}$  è continua a tratti ma **non** regolare a tratti, infatti in  $\lim_{\pm \epsilon \rightarrow 0^+} f'(\epsilon) = \pm \infty$
- La funzione  $f(t) = x/\pi - [x/\pi]$  è regolare a tratti.


 $\sin(1/x)$ 

 $\sqrt{|t|}$ 

 $x/\pi - [x/\pi]$

## Teorema (Diseguaglianza di Bessel)

Sia  $f \in L_2([-\pi, \pi])$  (cioè a quadrato integrabile) e siano  $a_k$  e  $b_k$  i corrispondenti coefficienti di Fourier allora vale

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 dt$$

Questo teorema implica  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0$ .

## Dimostrazione

(1/2).

Consideriamo  $S_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$  usando le rezioni di ortogonalità

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - S_N(t))^2 dt &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 dt + \int_{-\pi}^{\pi} S_N(t)^2 dt \\ &\quad - 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(t) S_N(t) dt \end{aligned}$$



## Dimostrazione

(2/2).

Dalle definizioni di  $a_k$  e  $b_k$  e usando le relazioni di ortogonalità

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) S_N(t) dt &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \right] dt \\ &= \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k^2 + b_k^2) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_N(t)^2 dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k^2 + b_k^2)$$

sostituendo nella prima uguaglianza

$$0 \leq \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - S_N(t))^2 dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 dt - \left[ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k^2 + b_k^2) \right]$$

e poi passando al limite per  $N \rightarrow \infty$  otteniamo la tesi. □



## Corollario (Il Lemma di Riemann–Lebesgue)

Sia  $f \in L_2([-\pi, \pi])$  (cioè a quadrato integrabile) allora vale

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt = 0$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt = 0$$

*inoltre dalla formula  $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$  segue che vale*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt + \phi) dt = 0$$

Questo corollario (lemma) è molto importante perché servirà a chiudere la dimostrazione della convergenza della serie di Fourier.

## Somme di Coseni

(1/2)

Consideriamo ora la seguente funzione

$$D_N(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^N \cos kt$$

moltiplicando  $D_N(t)$  per  $\sin \frac{t}{2}$  e usando la relazione  $2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$  otteniamo

$$\begin{aligned} 2D_N(t) \sin \frac{t}{2} &= \sin \frac{t}{2} + 2 \sum_{k=1}^N \cos kt \sin \frac{t}{2} \\ &= \sin \frac{t}{2} + \sum_{k=1}^N (\sin(kt + t/2) - \sin(kt - t/2)) \end{aligned}$$

molti termini si cancellano a vicenda così otteniamo:

$$D_N(t) = \frac{\sin(2N + 1)\frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}}$$



## Somme di Coseni

(2/2)

Dalla relazione precedente otteniamo

$$D_N(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^N \cos kt = \frac{\sin(2N+1)\frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}}$$

inoltre integrando su  $[-\pi, \pi]$  otteniamo

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(2N+1)\frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = 1$$

Lo stesso risultato si poteva ottenere in maniera più diretta senza ricorrere al **trucco** di moltiplicare per  $\sin \frac{t}{2}$  usando la formula esponenziale per il coseno:

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$$

e la somma di una serie geometrica

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$



Ora abbiamo tutti gli ingredienti per dimostrare il seguente teorema:

### Teorema (Convergenza della serie di Fourier)

*Sia  $f(t)$  regolare a tratti su  $[-\pi, \pi]$  allora la serie di Fourier  $S_f(t)$  esiste e converge per ogni  $t$  inoltre*

$$S_f(t) = \tilde{f}(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \epsilon) + f(x - \epsilon)}{2}$$

Questo vuole dire che nei punti in cui  $f(t)$  è continua abbiamo  $f(t) = \tilde{f}(t) = S_f(t)$  mentre nei punti di discontinuità la serie converge al punto medio del limite destro e sinistro della discontinuità.



# Convergenza della serie di Fourier

(1/5)

Consideriamo  $S_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$  allora possiamo scrivere usando le definizioni di  $a_k$  e  $b_k$  e  $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

$$\begin{aligned}
 S_N(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^N (\cos kx \cos kt + \sin kx \sin kt) \right] dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^N \cos k(x-t) \right] dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) D_N(x-t) dx
 \end{aligned}$$



## Convergenza della serie di Fourier

(2/5)

Ponendo  $z = x - t$  e sapendo che  $f(t)$  e  $D_N(t)$  sono periodiche

$$S_N(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+z) D_N(z) dz$$

sfruttando il fatto che  $D_N(z) = D_N(-z)$  possiamo porre  $x = -z$

$$S_N(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-x) D_N(x) dx$$

ed unendo le due espressioni

$$S_N(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t+z) + f(t-z)}{2} D_N(z) dz$$



## Convergenza della serie di Fourier

(3/5)

Sfruttando il fatto che  $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(z) dz = 1$   $D_N(t)$  possiamo scrivere

$$\begin{aligned} S_N(t) - \tilde{f}(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{f(t+z) + f(t-z)}{2} - \tilde{f}(t) \right) D_N(z) dz \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{f(t+z) + f(t-z)}{2} - \tilde{f}(t) \right) \frac{\sin(2N+1)\frac{z}{2}}{2 \sin \frac{z}{2}} dz \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_t(z) \sin(2N+1)\frac{z}{2} dz \end{aligned}$$

dove

$$\Phi_t(z) = \frac{f(t+z) + f(t-z) - 2\tilde{f}(t)}{4 \sin \frac{z}{2}}$$



## Convergenza della serie di Fourier

(4/5)

Nei punti  $t$  dove la funzione è regolare e la derivata prima esiste ed è continua la funzione  $\Phi_t(z)$  è regolare a tratti, infatti

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} \Phi_t(z) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(t+z) + f(t-z) - 2f(t)}{4 \sin \frac{z}{2}} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(f(t+z) - f(t)) + (f(t-z) - f(t))}{2z} \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{4 \sin \frac{z}{2}} \\ &= \frac{f'(t) - f'(t)}{4} \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

applicando il lemma di Riemann-Lebesgue a  $\Phi_t(z)$  otteniamo

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(t) - f(t) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_t(z) \sin(2N+1) \frac{z}{2} dz \\ &= 0 \end{aligned}$$

cioè  $f(t) = S_f(t)$ .



## Convergenza della serie di Fourier

(5/5)

Nei punti  $t$  dove la funzione è discontinua il ragionamento funziona ugualmente, infatti  $2\tilde{f}(t) = f(t+0) + f(t-0)$  e quindi

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} \Phi_t(z) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(f(t+z) - f(t+0)) + (f(t-z) - f(t-0))}{4 \sin \frac{z}{2}} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(f(t+z) - f(t)) + (f(t-z) - f(t))}{2z} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{2 \sin \frac{z}{2}} \\ &= \frac{f'(t+0) - f'(t-0)}{2} \end{aligned}$$

applicando il lemma di Riemann-Lebesgue a  $\Phi_t(z)$  otteniamo

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(t) - \tilde{f}(t) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_t(z) \sin(2N+1) \frac{z}{2} dz \\ &= 0 \end{aligned}$$

cioè  $\tilde{f}(t) = S_f(t)$ .

## Teorema

*Fissiamo i coefficienti  $a_k$  e  $b_k$  e consideriamo la serie*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

*se la serie converge uniformemente allora  $f(t)$  è continua e vale*

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt, \quad k = 0, 1, \dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt. \quad k = 1, 2, \dots$$

Questo teorema ci assicura almeno nel caso di funzioni continue e serie uniformemente convergenti che i coefficienti  $a_k$  e  $b_k$  si calcolano con le formule precedentemente derivate.

- Se consideriamo una funzione  $g(x)$  di periodo  $2\ell$  allora la funzione  $f(t) = g(t\ell/\pi)$  ha periodo  $2\pi$ , i coefficienti della serie di Fourier diventano quindi

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t\ell/\pi) dt = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} g(x) dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t\ell/\pi) \cos kt dt = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} g(x) \cos \frac{k\pi x}{\ell} dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t\ell/\pi) \sin kt dt = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} g(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx$$

- e la serie di Fourier corrispondente diventa

$$S_g(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{k\pi x}{\ell} + b_k \sin \frac{k\pi x}{\ell} \right)$$



- Se consideriamo le formule esponenziali per seno e coseno

$$\sin(x) = i \frac{e^{-ix} - e^{ix}}{2} \quad \cos(x) = \frac{e^{-ix} + e^{ix}}{2}$$

- e le sostituiamo nella serie di Fourier otteniamo

$$\begin{aligned} S_g(x) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \frac{e^{-i\frac{k\pi x}{\ell}} + e^{i\frac{k\pi x}{\ell}}}{2} + b_k \frac{e^{-i\frac{k\pi x}{\ell}} - e^{i\frac{k\pi x}{\ell}}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left( (a_k + ib_k) e^{-i\frac{k\pi x}{\ell}} + (a_k - ib_k) e^{i\frac{k\pi x}{\ell}} \right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{+i\frac{k\pi x}{\ell}} \quad c_k = \frac{1}{2} \begin{cases} a_k - ib_k & \text{se } k > 0 \\ a_0 & \text{se } k = 0 \\ a_{-k} + ib_{-k} & \text{se } k < 0 \end{cases} \end{aligned}$$



- Dunque in generale una serie di Fourier ha una rappresentazione come serie biinfinita di esponenziali complessi

$$S_f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i \frac{k\pi x}{\ell}} \quad c_k = \frac{1}{2} \begin{cases} a_k - ib_k & \text{se } k > 0 \\ a_0 & \text{se } k = 0 \\ a_{-k} + ib_{-k} & \text{se } k < 0 \end{cases}$$

- per  $k \geq 0$  abbiamo

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{a_k - ib_k}{2} = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} g(x) \left( \cos \frac{k\pi x}{\ell} - i \sin \frac{k\pi x}{\ell} \right) dx \\ &= \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} g(x) e^{-i \frac{k\pi x}{\ell}} dx \end{aligned}$$



- In modo analogo per  $k < 0$  abbiamo

$$\begin{aligned}c_k &= \frac{a_{-k} + ib_{-k}}{2} = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} g(x) \left( \cos \frac{-k\pi x}{\ell} + i \sin \frac{-k\pi x}{\ell} \right) dx \\&= \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} g(x) \left( \cos \frac{k\pi x}{\ell} - i \sin \frac{k\pi x}{\ell} \right) dx \\&= \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} g(x) e^{-i \frac{k\pi x}{\ell}} dx\end{aligned}$$

- cioè abbiamo per  $k = -\infty, \dots, +\infty$

$$c_k = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} g(x) e^{-i \frac{k\pi x}{\ell}} dx$$



- La serie di Fourier per una funzione periodica  $g(t)$  di periodo  $2\ell$  é la seguente

$$S_g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{k\pi t}{\ell}}$$

- dove

$$c_k = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} g(t) e^{-i\frac{k\pi t}{\ell}} dt, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$



- Vogliamo ora calcolare le costanti  $M_k$  e  $\phi_k$  tali che

$$M_k \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell} - \phi_k\right) = a_k \cos\frac{k\pi x}{\ell} + b_k \sin\frac{k\pi x}{\ell}$$

- Consideriamo la seguente identità trigonometrica

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

scegliendo  $\alpha = \frac{k\pi x}{\ell}$  e  $\beta = \phi_k$  il problema diventa risolvere il seguente sistema non lineare

$$\begin{cases} M_k \cos\phi_k = a_k \\ M_k \sin\phi_k = b_k \end{cases} \Rightarrow M_k^2 = a_k^2 + b_k^2, \quad \tan\phi_k = \frac{b_k}{a_k}$$

- e quindi abbiamo l'uguaglianza

$$\sqrt{a_k^2 + b_k^2} \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell} - \arctan\frac{b_k}{a_k}\right) = a_k \cos\frac{k\pi x}{\ell} + b_k \sin\frac{k\pi x}{\ell}$$

- Usando la precedente uguaglianza la serie di Fourier si può scrivere come

$$S_g(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell} - \phi_k\right)$$

- dove

$$A_k = \frac{1}{2} \begin{cases} a_0 & \text{se } k = 0 \\ \sqrt{a_k^2 + b_k^2} & \text{se } k > 0 \end{cases}$$

$$\phi_k = \arctan \frac{b_k}{a_k}$$



- La precedente forma permette di interpretare in forma significativa i parametri  $k$ ,  $A_k$  e  $\phi_k$ .

$$S_g(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell} - \phi_k\right)$$

- la funzione  $S_g(x)$  è decomposta come somma numerabile di onde semplici dove:
  - $k$  corrisponde alla frequenza di periodo  $\frac{kx}{2\ell}$ ;
  - $A_k$  corrisponde alla ampiezza dell'onda corrispondente;
  - $\phi_k$  corrisponde alla fase (anticipo o ritardo) dell'onda corrispondente.



- Se consideriamo le formule esponenziali per il coseno

$$\cos(x) = \frac{e^{-ix} + e^{ix}}{2}$$

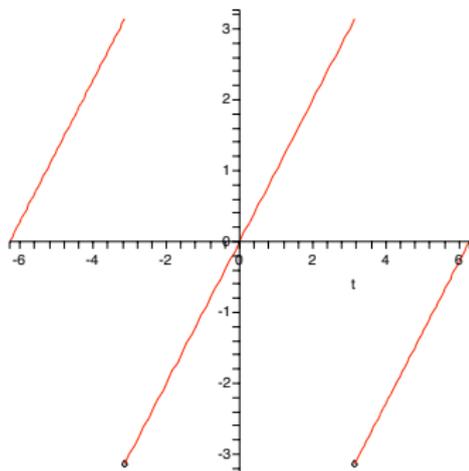
- La precedente forma si può riscrivere come

$$\begin{aligned} S_g(x) &= \frac{1}{2}A_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left[ e^{-i\left(\frac{k\pi x}{\ell} - \phi_k\right)} + e^{i\left(\frac{k\pi x}{\ell} - \phi_k\right)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{-i\phi_k} e^{i\frac{k\pi x}{\ell}}, \quad \phi_{-k} = -\phi_k \end{aligned}$$

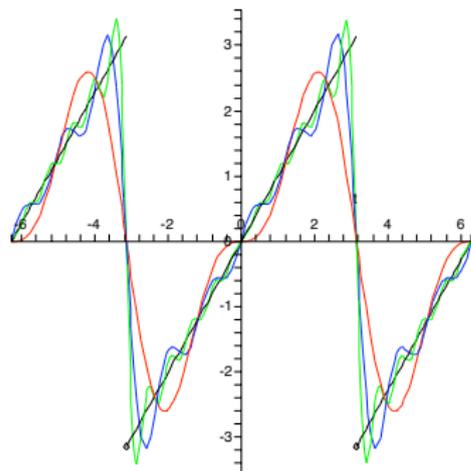
- Per cui si ottiene  $c_k = \frac{1}{2}A_k e^{-i\phi_k}$ 
  - $k$  corrisponde alla frequenza di periodo  $\frac{kx}{2\ell}$ ;
  - $|c_k|/2$  corrisponde alla ampiezza dell'onda corrispondente;
  - $\phi_k = \arctan \Im(c_k)/\Re(c_k)$  corrisponde alla fase (anticipo o ritardo) dell'onda corrispondente.

# Onda triangolare $f(t) = t$ $t \in (-\pi, \pi)$

$$f(t) \approx 2 \sin(t) - \sin(2t) + \frac{2}{3} \sin(3t) - \frac{1}{2} \sin(4t) + \frac{2}{5} \sin(5t) \\ - \frac{1}{3} \sin(6t) + \frac{2}{7} \sin(7t) - \frac{1}{4} \sin(8t)$$

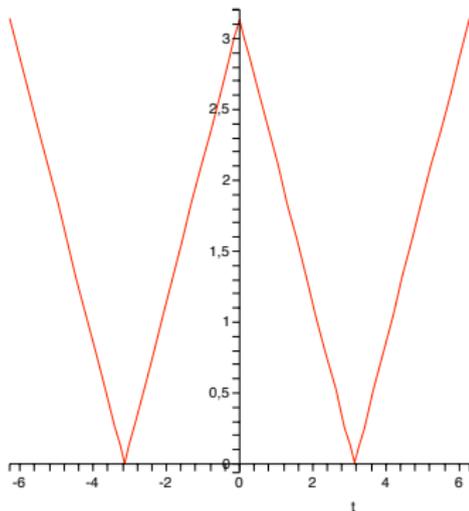


Funzione

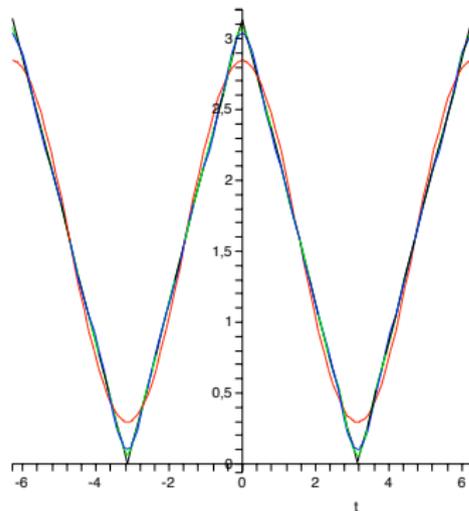
Serie di Fourier  $N = 2, 5, 10$

# Onda triangolare bis $f(t) = \pi - |t|$ per $t \in [-\pi, \pi]$

$$f(t) \approx 1/2 \pi + 4 \frac{\cos(t)}{\pi} + 4/9 \frac{\cos(3t)}{\pi} + \frac{4}{25} \frac{\cos(5t)}{\pi} + \frac{4}{49} \frac{\cos(7t)}{\pi}$$

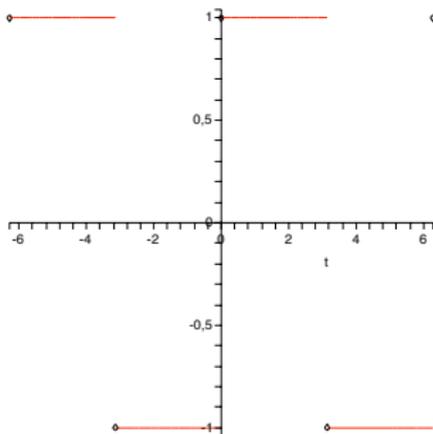


Funzione

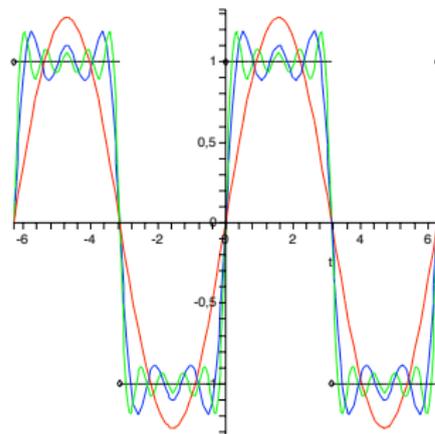
Serie di Fourier  $N = 2, 5, 10$ 

$$\text{Onda quadra } f(t) = \begin{cases} +1 & t \in (-\pi, 0] \\ -1 & t \in (0, \pi] \end{cases}$$

$$f(t) \approx 4 \frac{\sin(t)}{\pi} + 4/3 \frac{\sin(3t)}{\pi} + 4/5 \frac{\sin(5t)}{\pi} + 4/7 \frac{\sin(7t)}{\pi}$$

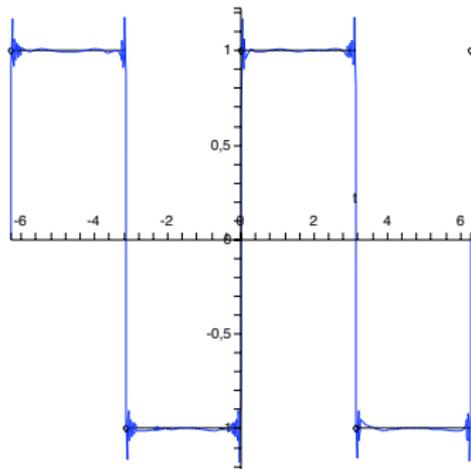


Funzione

Serie di Fourier  $N = 2, 5, 10$

# Il fenomeno di Gibbs

Anche se la serie di Fourier converge puntualmente ad una funzione regolare a tratti, la convergenza non è uniforme. Per le serie di Fourier questo si manifesta in **picchi di ampiezza finita** (non infinitesima) per  $N \rightarrow \infty$  che si muovono verso le discontinuità:



Serie di Fourier  $N = 100$

# Il teorema del fenomeno di Gibbs

Consideriamo la funzione funzione periodica di periodo  $2\pi$

$$f(t)|_{(0,2\pi)} = \frac{\pi - x}{2}, \quad x \in (0, 2\pi)$$

Questa è una funzione regolare a tratti e per il teorema di convergenza avremo che la sua serie di Fourier

$$S_f(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(t), \quad S_N(t) = \sum_{k=1}^N \frac{\sin kt}{k}$$

converge puntualmente in  $(0, 2\pi)$ . Se consideriamo la successione  $t_n = \frac{2\pi}{2n+1}$ , avremo che questa successione ha la proprietà:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(t_n) = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2} 1.1789797 \dots$$

poiché  $|f(t)| \leq \pi/2$  per ogni  $t$  questo significa che la serie di Fourier produce un **overshooting** del 17% che non si attenua per  $N \rightarrow \infty$ .



## Teorema (Il teorema del fenomeno di Gibbs)

Consideriamo la serie

$$S_N(t) = \sum_{k=1}^N \frac{\sin kt}{k}$$

e la successione  $t_n = \frac{2\pi}{2n+1}$ . Allora avremo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(t_n) = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2} 1.1789797 \dots$$

Dimostrazione.

(1/5).

poiché  $(\sin kt/k)' = \cos kt$  avremo

$$S_n(t) = - \int_t^\pi \sum_{k=1}^n \cos kz \, dz = \int_t^\pi \frac{1}{2} \, dz - \int_t^\pi \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kz \, dz$$

(2/5).

ricordando che  $D_n(t)$  e che  $D_n(t) = D_n(-t)$  e  $\int_0^\pi D_n(t) dt = \pi/2$

$$\begin{aligned}
 S_n(t) &= \frac{\pi - t}{2} - \int_t^\pi D_n(z) dz \\
 &= \frac{\pi - t}{2} - \int_0^\pi D_n(z) dz + \int_0^t D_n(z) dz \\
 &= \frac{-t}{2} + \int_0^t D_n(z) dz \\
 &= \frac{-t}{2} + \frac{t}{\pi} \int_0^\pi D_n(tx/\pi) dx \quad [tx = \pi z] \\
 &= \frac{-t}{2} + \frac{t}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(2n+1)\frac{tx}{2\pi}}{2 \sin \frac{tx}{2\pi}} dx
 \end{aligned}$$



(3/5).

sostituendo  $t_n = \frac{2\pi}{2n+1}$ 

$$\begin{aligned} S_n(t_n) &= \frac{\pi}{2n+1} + \int_0^\pi \frac{\sin x}{(2n+1) \sin \frac{x}{2n+1}} dx \\ &= \frac{\pi}{2n+1} + \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} \frac{x}{(2n+1) \sin \frac{x}{2n+1}} dx \\ &= \frac{\pi}{2n+1} + \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} Q_n(x) dx \end{aligned}$$

dove

$$Q_n(x) = \frac{x}{(2n+1) \sin \frac{x}{2n+1}}$$

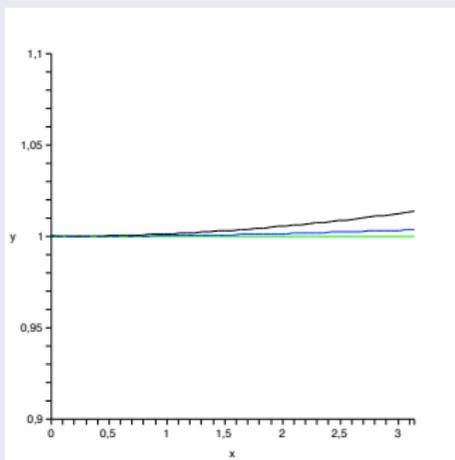
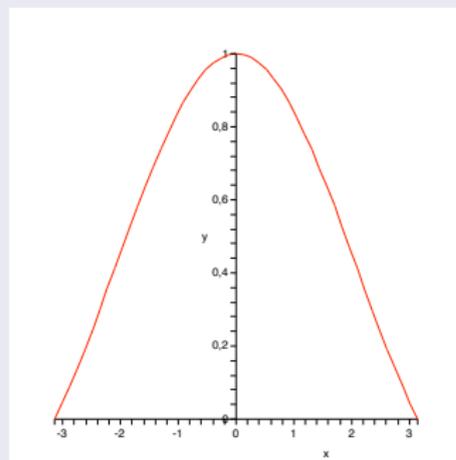


(4/5).

osserviamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0} Q_n(x) = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(x) = 1,$$


 $Q_n(x)$  per  $n = 5, 10, 100$ 

 $\sin x/x$ 


(5/5).

e quindi

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(t_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2n+1} + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} Q_n(x) dx \\ &= \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(x) dx \\ &= \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx \\ &= \frac{\pi}{2} 1.178979744 \dots\end{aligned}$$



# Riferimenti



Rajendra Bhatia

Fourier Series

Mathematical Association of America, 2005.



Allan Pinkus, Samy Zafrany

Fourier Series and Integral Transforms

Cambridge University Press, 1997.