Serie di Fourier

(Metodi Matematici e Calcolo per Ingegneria)

Enrico Bertolazzi

DIMS – Università di Trento

anno accademico 2008/2009

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830)

Outline

Funzioni periodiche

- Dato $T > 0$ si dice che $f(x)$ ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) è periodica di periodo T se vale

$$f(t + T) = f(t), \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

ovviamente poiché

$$f(t) = f(t + T) = f(t + 2T) = \cdots = f(t + nT) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

$f(t)$ è anche periodica di periodo kT per ogni $k > 0$ intero.

- Data una funzione $g(t)$ definita nell'intervallo $[a, b)$ possiamo estenderla ad una funzione periodica di periodo $b - a$ come segue

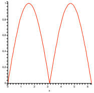
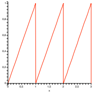
$$f(t) = g(t - n(b - a)), \qquad n(b - a) \le t < (n + 1)(b - a)$$

dove $n \in \mathbb{Z}$.

Esempi di periodiche

- Le funzioni trigonometriche $\sin t$ e $\cos t$ sono ovviamente periodiche di periodo 2π

$$\sin t = \sin(t+2\pi), \qquad \cos t = \cos(t+2\pi)$$

- $|\sin(t)| =$  $x - [x] =$ 

- Una famiglia di funzioni periodiche di periodo 2π è la seguente

$$S_N(t) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{N} \left(a_k \cos kt + b_k \sin kt\right)$$

- Le funzioni periodiche $\cos kt$ e $\sin kt$ e la funzione costante sono ortogonali rispetto al prodotto scalare di $L_2(0,2\pi)$ cioè:

$$\int_0^{2\pi} \sin mt \cos nt \,\mathrm{d}t = 0, \qquad n,m \geq 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin mt \sin nt \,\mathrm{d}t = 0, \qquad n,m \geq 1, \quad n \neq m$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mt \cos nt \,\mathrm{d}t = 0, \qquad n,m \geq 1, \quad n \neq m$$

inoltre

$$\int_0^{2\pi} (\sin mt)^2 \,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (\cos mt)^2 \,\mathrm{d}t = \pi, \qquad n \geq 1.$$

- La verifica della ortogonalità può essere fatta facilmente usando le formule

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

- Se consideriamo le formule esponenziali per seno e coseno

$$\sin t = i\frac{e^{-it} - e^{it}}{2} \qquad \cos t = \frac{e^{-it} + e^{it}}{2}$$

la verifica è ancora più facile.

- Se consideriamo gli spazi vettoriali V_N

$V_N = \text{SPAN}\{1/\sqrt{2}, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \ldots, \cos Nt, \sin Nt\}$

allora $S_N(t) \in V_N$ e il vettore

- Quindi il vettore di $2N+1$ coordinate

$$\left(a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_N, b_N\right)^T$$

determina univocamente $S_N(t)$

- C'è quindi una corrispondenza $1-1$ tra V_N e lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^{2N+1}$
- La condizione di ortogonalità delle funzioni seno e coseno permette di stabilire che questa corrispondenza è una isometria.

- Definiamo il prodotto scalare su V_N come segue:

$$(f,g) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

- se consideriamo

$$f(t) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{N}\big(a_k\cos kt + b_k\sin kt\big)$$

$$g(t) = \frac{a'_0}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{N}\big(a'_k\cos kt + b'_k\sin kt\big)$$

otteniamo

$$(f,g) = a_0a'_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_ka'_k + b_kb'_k)$$

- Definiamo ora la mappa $\Phi : V_N \to \mathbb{R}^{2N+1}$ come segue: data $f(t)$

$$f(t) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{N}\big(a_k\cos kt + b_k\sin kt\big)$$

$\Phi(f) = \mathbf{f}$ dove

$$\mathbf{f} = \big(a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_N, b_N\big)^T$$

- Ovviamente dato $\mathbf{f} = (f_0, f_1, \dots, f_{2N})^T$

$$\Phi^{-1}(\mathbf{f})(t) = \frac{f_0}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{N}\big(f_{2k-1}\cos kt + f_{2k}\sin kt\big)$$

- inoltre vale

$$\mathbf{f}\cdot\mathbf{g} = \Phi(f)\cdot\Phi(g) = (f,g)$$

dove $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g} = \sum_{k=0}^{2N} f_kg_k$, cioè il prodotto scalare di $\mathbb{R}^{2N+1}$.

A che ci serve tutto questo?

Il fatto che $V_N \equiv \mathbb{R}^{2N+1}$ ci permette di dire:

- Le funzioni $1/\sqrt{2}$, $\sin kt$, $\cos kt$ sono vettori di V_N ortonormali
- Questi vettori costituiscono una base per V_N
- Consideriamo ora una generica funzione periodica $g(t)$ di periodo 2π, allora potremmo considerare $g(t)$ appartenente ad uno spazio vettoriale V che contiene V_N (cioè $V_N \subset V$).
- Usando la othonormalità della base di V_N è immediato costruire una proiezione ortogonale di $g(t)$ in V_N: Infatti usando il fatto che $(g - \pi g)(t)$ deve essere ortogonale a tutti i vettori della base di V_N otteniamo:

$$(\pi g)(t) = \frac{(g, 1/\sqrt{2})}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{N}\big((g,\cos kt)\cos kt + (g,\sin kt)\sin kt\big)$$

- ovviamente se $g \in V_N$ abbiamo $g = \pi g$.

Se consideriamo lo spazio vettoriale V_∞ definito da

$$f \in V_\infty, \qquad f(t) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k\cos kt + b_k\sin kt\big)$$

ci perdiamo la corrispondenza con lo spazio delle successioni dei numeri reali

$$\{a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_k, b_k, \dots\}$$

perché non tutte le successioni producono una serie convergente per ogni t.

- Le funzioni $1/\sqrt{2}$, $\sin kt$, $\cos kt$ sono vettori di V_∞ ortonormali
- Questi vettori NON costituiscono una base per V_∞
- Consideriamo ora una generica funzione periodica $g(t)$ di periodo 2π. Usando il fatto che $(g - \pi g)(t)$ deve essere ortogonale a tutti i vettori di V_∞ otteniamo:

$$(\pi g)(t) = \frac{(g, 1/\sqrt{2})}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{\infty}\big((g,\cos kt)\cos kt + (g,\sin kt)\sin kt\big)$$

Le considerazioni precedenti ci permettono di scrivere un gran numero di funzioni periodiche di periodo 2π come serie di funzioni

$$f(t) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kt + b_k \sin kt\right)$$

ci chiediamo ora:

- Quale classe di funzioni (periodiche) ammette tale rappresentazione come serie di seni e coseni?
- Quando è che questa serie ha senso?
- Le espressoni per i coefficienti a_k e b_k che abbiamo derivato nel caso della serie finita sono valide anche per la serie infinita?

La serie di Fourier

- La serie di Fourier per una funzione periodica $f(t)$ di periodo 2π é la seguente

$$S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kt + b_k \sin kt\right)$$

- dove

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt. \qquad k = 1, 2, \ldots$$

- Attenzione: abbiamo cambiato $1/\sqrt{2}$ con $1/2$ in modo che la formula per a_0 sia la stessa per a_k (infatti $\cos(0t) = 1$). In questo modo la funzione costante è solo ortogonale alle altre.

Quando converge la serie di Fourier ?

La serie di Fourier può convergere su tutto $[-\pi, \pi]$ o solo su un sottinsieme (anche vuoto). Quando converge non è detto che converga alla funzione di partenza. Esiste pero una classe di funzioni periodiche abbastanza ampia dove le cose vanno bene.

Definizione (Funzioni continue a tratti)

Una funzione $f(t)$ definita su $[a, b]$ è detta continua a tratti se:

(i) *esiste una suddivisione $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ tale che $f(t)$ è continua in ogni sotto intervallo $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2 \ldots, n$.*

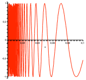
(ii) *Per ogni intervallo I_k i limiti $f(x_k - 0) = \lim_{\epsilon \to 0^+} f(x_k - \epsilon)$ e $f(x_{k-1} + 0) = \lim_{\epsilon \to 0^+} f(x_{k-1} + \epsilon)$ esistono e sono finiti.*

Se $f(t)$ ha derivata prima e $f(t)$ con $f'(t)$ sono continue a tratti la serie di Fourier coverge alla funzione (tranne nei punti di discontinuità).

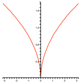
Definizione (Funzioni regolari a tratti)

Una funzione $f(t)$ definita su $[a, b]$ è detta regolare a tratti se esiste la derivata prima su $[a, b]$ escludendo al più un numero finito di punti. Inoltre $f(t)$ ed $f'(t)$ cono continue a tratti.

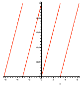
- La funzione $\sin(1/x)$ è continua su $(0, 1]$ ma non continua a tratti su $[0, 1]$ infatti $\lim_{\epsilon \to 0} \sin(1/x)$ non esiste.
- La funzione $f(t) = \sqrt{|t|}$ è continua a tratti ma non regolare a tratti, infatti in $\lim_{\pm\epsilon \to 0^+} f'(\epsilon) = \pm\infty$
- La funzione $f(t) = x/\pi - [x/\pi]$ è regolare a tratti.



$\sin(1/x)$



$\sqrt{|t|}$



$x/\pi - [x/\pi]$

Teorema (Diseguaglianza di Bessel)

Sia $f \in L_2([-\pi,\pi])$ *(cioè a quadrato integrabile) e siano* a_k *e* b_k *i corrispondenti coefficienti di Fourier allora vale*

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2\,\mathrm{d}t$$

Questo teorema implica $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = 0$.

Dimostrazione (1/2).

Consideriamo $S_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}\left(a_k \cos kt + b_k \sin kt\right)$ usando le rezioni di ortogonalità

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f(t) - S_N(t))^2\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2\,\mathrm{d}t + \int_{-\pi}^{\pi} S_N(t)^2\,\mathrm{d}t - 2\int_{-\pi}^{\pi} f(t)S_N(t)\,\mathrm{d}t$$

Dimostrazione (2/2).

Dalle definizioni di a_k e b_k e usando le relazioni di ortogonalità

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)S_N(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}\left(a_k \cos kt + b_k \sin kt\right)\right]\mathrm{d}t \\ &= \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{N}(a_k^2 + b_k^2)\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_N(t)^2\,\mathrm{d}t = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{N}(a_k^2 + b_k^2)$$

sostituendo nella prima uguaglianza

$$0 \leq \int_{-\pi}^{\pi}(f(t) - S_N(t))^2\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2\,\mathrm{d}t - \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{N}(a_k^2 + b_k^2)\right]$$

e poi passando al limite per $N \to \infty$ otteniamo la tesi. □

Corollario (Il Lemma di Riemann–Lebesgue)

Sia $f \in L_2([-\pi,\pi])$ *(cioè a quadrato integrabile) allora vale*

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t = 0$$

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}t = 0$$

inoltre dalla formula $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ *segue che vale*

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt+\phi)\,\mathrm{d}t = 0$$

Questo corollario (lemma) è molto importante perché servirà a chiudere la dimostrazione della convergenza della serie di Fourier.

Somme di Coseni (1/2)

Consideriamo ora la seguente funzione

$$D_N(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N}\cos kt$$

moltiplicando $D_N(t)$ per $\sin\frac{t}{2}$ e usando la relazione $2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$ otteniamo

$$\begin{aligned}2D_N(t)\sin\frac{t}{2} &= \sin\frac{t}{2} + 2\sum_{k=1}^{N}\cos kt\sin\frac{t}{2} \\ &= \sin\frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{N}\left(\sin(kt+t/2) - \sin(kt-t/2)\right)\end{aligned}$$

molti termini si cancellano a vicenda così otteniamo:

$$D_N(t) = \frac{\sin(2N+1)\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}$$

Somme di Coseni (2/2)

Dalla relazione precedente otteniamo

$$D_N(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N} \cos kt = \frac{\sin(2N+1)\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}$$

inoltre integrando su $[-\pi, \pi]$ otteniamo

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(2N+1)\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t = 1$$

Lo stesso risultato si poteva ottenere in maniera più diretta senza ricorrere al trucco di moltiplicare per $\sin\frac{t}{2}$ usando la formula esponenziale per il coseno:

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$$

e la somma di una serie geometrica

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Ora abbiamo tutti gli ingredienti per dimostrare il seguente teorema:

Teorema (Convergenza della serie di Fourier)

Sia $f(t)$ regolare a tratti su $[-\pi, \pi]$ allora la serie di Fourier $S_f(t)$ esiste e converge per ogni t inoltre

$$S_f(t) = \tilde{f}(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x+\epsilon) + f(x-\epsilon)}{2}$$

Questo vuole dire che nei punti in cui $f(t)$ è continua abbiamo $f(t) = \tilde{f}(t) = S_f(t)$ mentre nei punti di discontinuità la serie converge al punto medio del limite destro e sinistro della discontinuità.

Convergenza della serie di Fourier (1/5)

Consideriamo $S_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \left(a_k \cos kt + b_k \sin kt\right)$ allora possiamo scrivere usando le definizioni di a_k e b_k e $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$$\begin{aligned}
S_N(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \left(a_k \cos kt + b_k \sin kt\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N}\left(\cos kx \cos kt + \sin kx \sin kt\right)\right]\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N}\cos k(x-t)\right]\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) D_N(x-t)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Convergenza della serie di Fourier (2/5)

Ponendo $z = x - t$ e sapendo che $f(t)$ e $D_N(t)$ sono periodiche

$$S_N(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+z) D_N(z)\,\mathrm{d}z$$

sfruttando il fatto che $D_N(z) = D_N(-z)$ possiamo porre $x = -z$

$$S_N(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-x) D_N(x)\,\mathrm{d}x$$

ed unendo le due espressioni

$$S_N(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t+z) + f(t-z)}{2} D_N(z)\,\mathrm{d}z$$

Convergenza della serie di Fourier (3/5)

Sfruttando il fatto che $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(z)\,\mathrm{d}z = 1$ $D_N(t)$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned}S_N(t) - \tilde{f}(t) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{f(t+z)+f(t-z)}{2} - \tilde{f}(t)\right) D_N(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{f(t+z)+f(t-z)}{2} - \tilde{f}(t)\right) \frac{\sin(2N+1)\frac{z}{2}}{2\sin\frac{z}{2}}\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_t(z)\sin(2N+1)\frac{z}{2}\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

dove

$$\Phi_t(z) = \frac{f(t+z)+f(t-z)-2\tilde{f}(t)}{4\sin\frac{z}{2}}$$

Convergenza della serie di Fourier (4/5)

Nei punti t dove la funzione è regolare e la derivata prima esiste ed è continua la funzione $\Phi_t(z)$ è regolare a tratti, infatti

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 0}\Phi_t(z) &= \lim_{z\to 0}\frac{f(t+z)+f(t-z)-2f(t)}{4\sin\frac{z}{2}} \\ &= \lim_{z\to 0}\frac{(f(t+z)-f(t))+(f(t-z)-f(t))}{2z}\cdot\lim_{z\to 0}\frac{z}{4\sin\frac{z}{2}} \\ &= \frac{f'(t)-f'(t)}{4}\cdot 1 = 0\end{aligned}$$

applicando il lemma di Riemann-Lebesgue a $\Phi_t(z)$ otteniamo

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} S_N(t) - f(t) &= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_t(z)\sin(2N+1)\frac{z}{2}\,\mathrm{d}z \\ &= 0\end{aligned}$$

cioè $f(t) = S_f(t)$.

Convergenza della serie di Fourier (5/5)

Nei punti t dove la funzione è discontinua il ragionamento funziona ugualmente, infatti $2\tilde{f}(t) = f(t+0)+f(t-0)$ e quindi

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 0}\Phi_t(z) &= \lim_{z\to 0}\frac{(f(t+z)-f(t+0))+(f(t-z)-f(t-0))}{4\sin\frac{z}{2}} \\ &= \lim_{z\to 0}\frac{(f(t+z)-f(t))+(f(t-z)-f(t))}{2z}\lim_{z\to 0}\frac{z}{2\sin\frac{z}{2}} \\ &= \frac{f'(t+0)-f'(t-0)}{2}\end{aligned}$$

applicando il lemma di Riemann-Lebesgue a $\Phi_t(z)$ otteniamo

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} S_N(t) - \tilde{f}(t) &= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_t(z)\sin(2N+1)\frac{z}{2}\,\mathrm{d}z \\ &= 0\end{aligned}$$

cioè $\tilde{f}(t) = S_f(t)$.

Teorema

Fissiamo i coefficienti a_k e b_k e consideriamo la serie

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kt + b_k\sin kt\right)$$

se la serie converge uniformemente allora $f(t)$ è continua e vale

$$\begin{aligned}a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,\mathrm{d}t, \qquad k = 0,1,\ldots \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,\mathrm{d}t. \qquad k = 1,2,\ldots\end{aligned}$$

Questo teorema ci assicura almeno nel caso di funzioni continue e serie uniformemente convergenti che i coefficienti a_k e b_k si calcolano con le formule precedentemente derivate.

- Se consideriamo una funzione $g(x)$ di periodo 2ℓ allora la funzione $f(t) = g(t\ell/\pi)$ ha periodo 2π, i coefficienti della serie di Fourier diventano quindi

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t\ell/\pi)\,\mathrm{d}t \qquad = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t\ell/\pi)\cos kt\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} g(x)\cos\frac{k\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t\ell/\pi)\sin kt\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} g(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x$$

- e la serie di Fourier corrispondente diventa

$$S_g(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{\ell} + b_k\sin\frac{k\pi x}{\ell}\right)$$

- Se consideriamo le formule esponenziali per seno e coseno

$$\sin(x) = i\frac{e^{-ix} - e^{ix}}{2} \qquad \cos(x) = \frac{e^{-ix} + e^{ix}}{2}$$

- e le sostituiamo nella serie di Fourier otteniamo

$$\begin{aligned} S_g(x) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\frac{e^{-i\frac{k\pi x}{\ell}} + e^{i\frac{k\pi x}{\ell}}}{2} + b_k\frac{e^{-i\frac{k\pi x}{\ell}} - e^{i\frac{k\pi x}{\ell}}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left((a_k + ib_k)e^{-i\frac{k\pi x}{\ell}} + (a_k - ib_k)e^{i\frac{k\pi x}{\ell}}\right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{+i\frac{k\pi x}{\ell}} \qquad c_k = \frac{1}{2}\begin{cases} a_k - ib_k & \text{se } k > 0 \\ a_0 & \text{se } k = 0 \\ a_{-k} + ib_{-k} & \text{se } k < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- Dunque in generale una serie di Fourier ha una rappresentazione come serie biinfinita di exponenziali complessi

$$S_f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{k\pi x}{\ell}} \qquad c_k = \frac{1}{2}\begin{cases} a_k - ib_k & \text{se } k > 0 \\ a_0 & \text{se } k = 0 \\ a_{-k} + ib_{-k} & \text{se } k < 0 \end{cases}$$

- per $k \geq 0$ abbiamo

$$\begin{aligned} c_k = \frac{a_k - ib_k}{2} &= \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} g(x)\left(\cos\frac{k\pi x}{\ell} - i\sin\frac{k\pi x}{\ell}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} g(x)e^{-i\frac{k\pi x}{\ell}}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

- In modo analogo per $k < 0$ abbiamo

$$\begin{aligned} c_k = \frac{a_{-k} + ib_{-k}}{2} &= \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} g(x)\left(\cos\frac{-k\pi x}{\ell} + i\sin\frac{-k\pi x}{\ell}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} g(x)\left(\cos\frac{k\pi x}{\ell} - i\sin\frac{k\pi x}{\ell}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} g(x)e^{-i\frac{k\pi x}{\ell}}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

- cioè abbiamo per $k = -\infty, \dots, +\infty$

$$c_k = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} g(x)e^{-i\frac{k\pi x}{\ell}}\,\mathrm{d}x$$

- La serie di Fourier per una funzione periodica $g(t)$ di periodo 2ℓ é la seguente

$$S_g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{k\pi t}{\ell}}$$

- dove

$$c_k = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} g(t)e^{-i\frac{k\pi t}{\ell}}\,\mathrm{d}t, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

- Vogliamo ora calcolare le costanti M_k e ϕ_k tali che

$$M_k \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell} - \phi_k\right) = a_k \cos\frac{k\pi x}{\ell} + b_k \sin\frac{k\pi x}{\ell}$$

- Consideriamo la seguente identità trigonometrica

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

scegliendo $\alpha = \frac{k\pi x}{\ell}$ e $\beta = \phi_k$ il problema diventa risolvere il seguente sistema non lineare

$$\begin{cases} M_k \cos\phi_k = a_k \\ M_k \sin\phi_k = b_k \end{cases} \quad \Rightarrow \quad M_k^2 = a_k^2 + b_k^2, \quad \tan\phi_k = \frac{b_k}{a_k}$$

- e quindi abbiamo l'ugualianza

$$\sqrt{a_k^2 + b_k^2}\cos\left(\frac{k\pi x}{\ell} - \arctan\frac{b_k}{a_k}\right) = a_k \cos\frac{k\pi x}{\ell} + b_k \sin\frac{k\pi x}{\ell}$$

- Usando la precedente uguaglianza la serie di Fourier si può scrivere come

$$S_g(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell} - \phi_k\right)$$

- dove

$$A_k = \frac{1}{2}\begin{cases} a_0 & \text{se } k = 0 \\ \sqrt{a_k^2 + b_k^2} & \text{se } k > 0 \end{cases}$$

$$\phi_k = \arctan\frac{b_k}{a_k}$$

- La precedente forma permette di interpretare in forma significativa i parametri k, A_k e ϕ_k.

$$S_g(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell} - \phi_k\right)$$

- la funzione $S_g(x)$ è decomposta come somma numerabile di onde semplici dove:
  - k corrisponde alla frequenza di periodo $\frac{kx}{2\ell}$;
  - A_k corrisponde alla ampiezza dell'onda corrispondente;
  - ϕ_k corrisponde alla fase (anticipo o ritardo) dell'onda corrispondente.

- Se consideriamo le formule esponenziali per il coseno

$$\cos(x) = \frac{e^{-ix} + e^{ix}}{2}$$

- La precedente forma si può riscrivere come

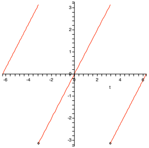
$$S_g(x) = \frac{1}{2}A_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} A_k \left[e^{-i\left(\frac{k\pi x}{\ell} - \phi_k\right)} + e^{i\left(\frac{k\pi x}{\ell} - \phi_k\right)} \right]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{-i\phi_k} e^{i\frac{k\pi x}{\ell}}, \qquad \phi_{-k} = -\phi_k$$

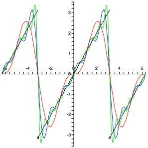
- Per cui si ottiene $c_k = \frac{1}{2}A_k e^{-i\phi_k}$
  - k corrisponde alla frequenza di periodo $\frac{k\pi}{2\ell}$;
  - $|c_k|/2$ corrisponde alla ampiezza dell'onda corrispondente;
  - $\phi_k = \arctan \Im(c_k)/\Re(c_k)$ corrisponde alla fase (anticipo o ritardo) dell'onda corrispondente.

Onda triangolare $f(t) = t \qquad t \in (-\pi, \pi)$

$$f(t) \approx 2\sin(t) - \sin(2t) + 2/3\sin(3t) - 1/2\sin(4t) + 2/5\sin(5t)$$
$$-1/3\sin(6t) + 2/7\sin(7t) - 1/4\sin(8t)$$



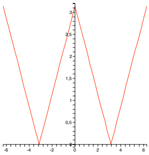
Funzione



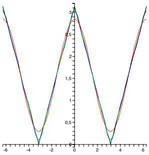
Serie di Fourier $N = 2, 5, 10$

Onda triangolare bis $f(t) = \pi - |t|$ per $t \in [-\pi, \pi]$

$$f(t) \approx 1/2\,\pi + 4\,\frac{\cos(t)}{\pi} + 4/9\,\frac{\cos(3t)}{\pi} + \frac{4}{25}\,\frac{\cos(5t)}{\pi} + \frac{4}{49}\,\frac{\cos(7t)}{\pi}$$



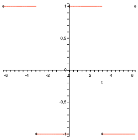
Funzione



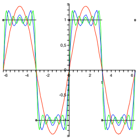
Serie di Fourier $N = 2, 5, 10$

Onda quadra $f(t) = \begin{cases} +1 & t \in (-\pi, 0] \\ -1 & t \in (0, \pi] \end{cases}$

$$f(t) \approx 4\,\frac{\sin(t)}{\pi} + 4/3\,\frac{\sin(3t)}{\pi} + 4/5\,\frac{\sin(5t)}{\pi} + 4/7\,\frac{\sin(7t)}{\pi}$$



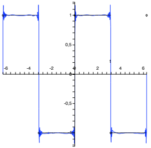
Funzione



Serie di Fourier $N = 2, 5, 10$

Il fenomeno di Gibbs

Anche se la serie di Fourier converge puntualmente ad una funzione regolare a tratti, la convergenza non è uniforme. Per le serie di Fourier questo si manifesta in picchi di ampiezza finita (non infinitesima) per $N \to \infty$ che si muovono verso le discontinuità:



Serie di Fourier $N = 100$

Il teorema del fenomeno di Gibbs

Consideriamo la funzione funzione periodica di periodo 2π

$$f(t)|_{(0,2\pi)} = \frac{\pi - x}{2}, \qquad x \in (0, 2\pi)$$

Questa è una funzione regolare a tratti e per il teorema di convergenza avremo che la sua serie di Fourier

$$S_f(t) = \lim_{N \to' infty} S_N(t), \qquad S_N(t) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\sin kt}{k}$$

converge puntualmente in $(0, 2\pi)$. Se consideriamo la successione $t_n = \frac{2\pi}{2n+1}$, avremo che questa successione ha la proprietà:

$$\lim_{n \to \infty} S_n(t_n) = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} \, dt = \frac{\pi}{2} 1.1789797\ldots$$

poiché $|f(t)| \leq \pi/2$ per ogni t questo significa che la serie di Fourier produce un overshooting del 17% che non si attenua per $N \to \infty$.

Teorema (Il teorema del fenomeno di Gibbs)

Consideriamo la serie

$$S_N(t) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\sin kt}{k}$$

e la successione $t_n = \frac{2\pi}{2n+1}$. *Allora avremo*

$$\lim_{n \to \infty} S_n(t_n) = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} \, dt = \frac{\pi}{2} 1.1789797\ldots$$

Dimostrazione. (1/5).

poiché $(\sin kt/k)' = \cos kt$ avremo

$$S_n(t) = -\int_t^{\pi} \sum_{k=1}^{n} \cos kz \, dz = \int_t^{\pi} \frac{1}{2} \, dz - \int_t^{\pi} \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kz \, dz$$

(2/5).

ricordando che $D_n(t)$ e che $D_n(t) = D_n(-t)$ e $\int_0^{\pi} D_n(t) \, dt = \pi/2$

$$\begin{aligned}
S_n(t) &= \frac{\pi - t}{2} - \int_t^{\pi} D_n(z) \, dz \\
&= \frac{\pi - t}{2} - \int_0^{\pi} D_n(z) \, dz + \int_0^{t} D_n(z) \, dz \\
&= \frac{-t}{2} + \int_0^{t} D_n(z) \, dz \\
&= \frac{-t}{2} + \frac{t}{\pi} \int_0^{\pi} D_n(tx/\pi) \, dx \quad [tx = \pi z] \\
&= \frac{-t}{2} + \frac{t}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(2n+1)\frac{tx}{2\pi}}{2 \sin \frac{tx}{2\pi}} \, dx
\end{aligned}$$

$\square$

(3/5).

sostituendo $t_n = \frac{2\pi}{2n+1}$

$$
\begin{aligned}
S_n(t_n) &= \frac{\pi}{2n+1} + \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{(2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{2n+1} + \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,\frac{x}{(2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{2n+1} + \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} Q_n(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

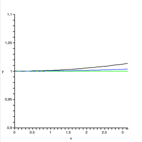
dove

$$
Q_n(x) = \frac{x}{(2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}}
$$

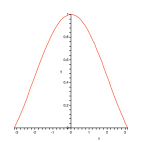
(4/5).

osserviamo che

$$
\lim_{x\to 0} Q_n(x) = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} Q_n(x) = 1,
$$



$Q_n(x)$ per $n = 5, 10, 100$



$\sin x/x$

(5/5).

e quindi

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} S_n(t_n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n+1} + \lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} Q_n(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} \lim_{n\to\infty} Q_n(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{2} 1.178979744\ldots
\end{aligned}
$$

Riferimenti

- Rajendra Bhatia
  Fourier Series
  Mathematical Association of America, 2005.
- Allan Pinkus, Samy Zafrany
  Fourier Series and Integral Transforms
  Cambridge University Press, 1997.