

# La trasformata $Z$

(Metodi Matematici e Calcolo per Ingegneria)

Enrico Bertolazzi

DIMS – Università di Trento

anno accademico 2008/2009



## Outline

- 1 La trasformata  $Z$
- 2 Trasformazioni di segnali elementari
  - Impulso unitario ed Heaviside discreta
  - Esponenziale
  - Shift
  - Il segnale  $n_k$  e il coefficiente binomiale
  - convoluzione di due segnali
  - I segnali  $\cos \omega n$  e  $\sin \omega n$
  - I segnali polinomiali
- 3 Tabella delle trasformate
- 4 Altre proprietà notevoli
- 5 Antitrasformata  $Z$
- 6 Esempio: successione di Fibonacci



## Definizione

- La trasformata  $Z$  si applica a segnali discreti causali.
- Un segnale discreto si denota con varie notazioni:

$$f_n : n = 0, 1, 2, \dots$$

$$f[n] : n = 0, 1, 2, \dots$$

$$f(n) : n = 0, 1, 2, \dots$$

- La trasformata è definita come:

$$\mathcal{Z}\{f_n\}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}$$

- Una notazione più leggera della  $Z$ -trasformata è la seguente:

$$\mathcal{Z}\{f_n\}(z) \equiv \tilde{f}(z)$$

La trasformata  $Z$ 

- Utilità: è usata nell'analisi dei segnali digitali; trasforma

Equazioni alle differenze  $\Rightarrow$  Equazioni algebriche

- Analogia con il logaritmo:

$$a \rightarrow \log a$$

$$a \cdot b \rightarrow \log a + \log b$$

cioè il logaritmo trasforma i **prodotti** in **somme** che sono più facili da maneggiare.



## Linearità della $Z$ -trasformata

Siano  $f_n$  e  $g_n$  due segnali discreti ed  $\alpha$  e  $\beta$  due scalari

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{\alpha f_n + \beta g_n\}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha f_n + \beta g_n) z^{-n} \\ &= \alpha \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} + \beta \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^{-n} \\ &= \alpha \mathcal{Z}\{f_n\}(z) + \beta \mathcal{Z}\{g_n\}(z)\end{aligned}$$



## Impulso unitario

- L'impulso unitario è definito come segue

$$\delta_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0, \\ 0 & \text{se } n > 0, \end{cases}$$

- La sua trasformata si calcola immediatamente

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{\delta_n\}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n z^{-n} \\ &= 1\end{aligned}$$



## Heaviside discreta o gradino

- Il gradino unitario è definito come segue

$$\mathbf{1} = \{1\}_{n=0}^{\infty}$$

- La sua trasformata si calcola immediatamente

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{\delta_n\}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_n z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \\ &= \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}\end{aligned}$$



## Esponenziale

- Trasformata del segnale esponenziale  $a^n$

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{a^n\}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n \\ &= \frac{1}{1 - a/z} = \frac{z}{z - a}\end{aligned}$$

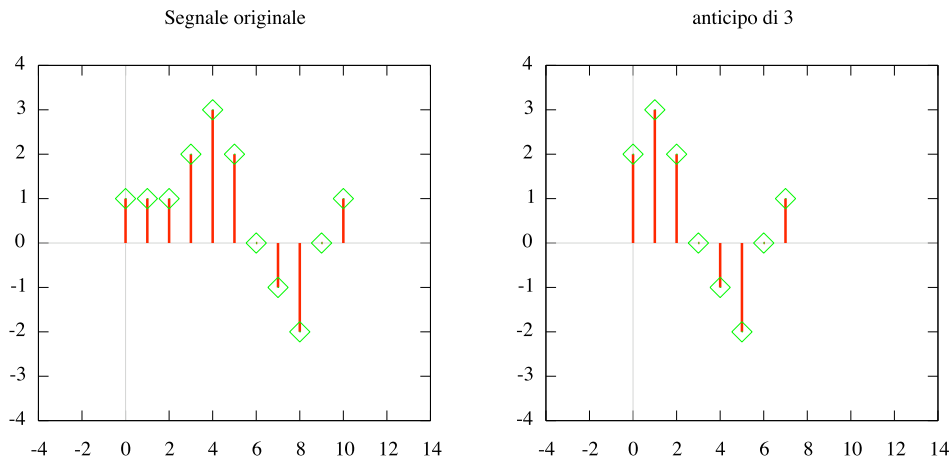
- Trasformata del prodotto per l'esponenziale  $a^n$

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{a^n f_n\}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left(\frac{z}{a}\right)^{-n} \\ &= \mathcal{Z}\{f_n\}\left(\frac{z}{a}\right)\end{aligned}$$



## Shift (Anticipo temporale)

(1/2)



## Shift (Anticipo temporale)

(2/2)

Trasformata del segnale traslato  $f_{n+k}$  con  $k > 0$  intero

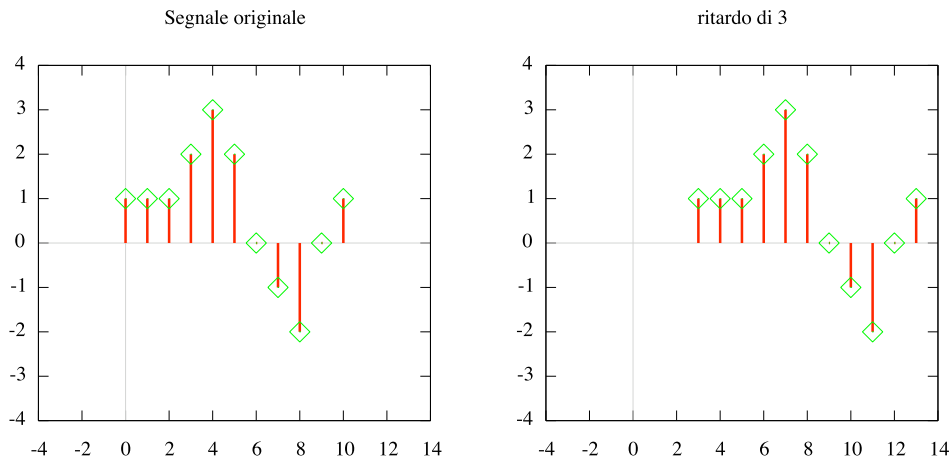
$$\begin{aligned}
 \mathcal{Z}\{f_{n+k}\}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+k} z^{-n} \\
 &= z^k \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+k} z^{-(n+k)} \\
 &= z^k \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} - z^k \sum_{n=0}^{k-1} f_n z^{-n} \\
 &= z^k \left( \mathcal{Z}\{f_n\}(z) - \sum_{n=0}^{k-1} f_n z^{-n} \right)
 \end{aligned}$$

**Osservazione:** In analogia con la derivazione nella trasformata di Laplace ci sono le *condizioni iniziali* nella trasformata.



## Shift (Ritardo temporale)

(1/2)



## Shift (Ritardo temporale)

(2/2)

Trasformata del segnale traslato  $f_{n-k}$  con  $k > 0$  intero

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Z}\{f_{n-k}\}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_{n-k} z^{-n} \\
 &= z^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} f_{n-k} z^{-(n-k)} \\
 &= z^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} \\
 &= z^{-k} \mathcal{Z}\{f_n\}(z)
 \end{aligned}$$

**Osservazione:** A differenza della trasformata di Laplace qui non ci sono le *condizioni iniziali* nella trasformata. Perché?



Il segnale  $n_k$ 

(1/2)

- Il segnale  $n_k$  è definito come segue:

$$n_k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$$

- Casi particolari:

- $n_0 = 1$ ;
- $n_1 = n$ .

- Osservando che

$$\frac{d^k}{dw^k} w^n = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)w^{n-k}$$

Possiamo scrivere

$$\mathcal{Z}\{n_k\}(1/w) = \sum_{n=0}^{\infty} n_k w^n = w^k \frac{d^k}{dw^k} \sum_{n=0}^{\infty} w^n$$

Il segnale  $n_k$ 

(2/2)

La trasformata vale:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{n_k\}(1/w) &= w^k \frac{d^k}{dw^k} \frac{1}{1-w} &&= w^k \frac{d^k}{dw^k} (1-w)^{-1} \\ &= w^k \frac{d^{k-1}}{dw^{k-1}} (1-w)^{-2} &&= w^k 2 \frac{d^{k-2}}{dw^{k-2}} (1-w)^{-3} \\ &= w^k 2 \cdot 3 \frac{d^{k-3}}{dw^{k-3}} (1-w)^{-4} = \dots = \\ &= w^k \frac{k!}{(1-w)^{k+1}} \end{aligned}$$

e sostituendo  $z = 1/w$  otteniamo

$$\mathcal{Z}\{n_k\}(z) = \frac{z^k k!}{(z-1)^{k+1}}$$



## Il segnale coefficiente binomiale

- Il segnale è definito come segue:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

- Casi particolari:

- $\binom{n}{0} = 1$ ;
- $\binom{n}{1} = n$ .

- Osservando che

$$\binom{n}{k} = \frac{n_k}{k!}$$

Possiamo scrivere

$$\mathcal{Z} \left\{ \binom{n}{k} \right\} (z) = \frac{z}{(z-1)^{k+1}}$$



## Z-trasformata della convoluzione

(1/2)

- La convoluzione di due segnali  $f_n$  e  $g_n$  è definita come segue

$$(f \star g)_n = \sum_{k=0}^n f_k g_{n-k}$$

- Per la trasformata della convoluzione

$(f \star g)(z) = \mathcal{Z} \{(f \star g)_n\} (z)$  vale la seguente notevole proprietà:

$$(f \star g)(z) = \tilde{f}(z)\tilde{g}(z)$$





## Z-trasformata della convoluzione

(2/2)

La trasformata vale

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{(f \star g)_n\}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n f_k g_{n-k} z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{n-k} f_k g_{n-k} z^{-(n-k)} z^{-k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{n-k} g_{n-k} z^{-(n-k)} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k} \left( \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^{-n} \right) \\
&= \tilde{f}(z) \tilde{g}(z)
\end{aligned}$$

Il segnale  $\cos \omega n$ 

Usando l'uguaglianza  $2 \cos \alpha = e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}$  dove  $i$  è l'unità immaginaria nel campo complesso, possiamo calcolare:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{\cos \omega n\}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \cos \omega n z^{-n} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{i\omega n} + e^{-i\omega n}) z^{-n} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{i\omega} z^{-1})^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-i\omega} z^{-1})^n \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{1 - e^{i\omega} z^{-1}} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - e^{-i\omega} z^{-1}} \\
&= \frac{z}{2} \frac{z - e^{i\omega} + z - e^{-i\omega}}{(z - e^{i\omega})(z - e^{-i\omega})} \\
&= \frac{z^2 - z \cos \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}
\end{aligned}$$



## Il segnale $\sin \omega n$

Usando l'uguaglianza  $2i \sin \alpha = e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}$  dove  $i$  è l'unità immaginaria nel campo complesso, possiamo calcolare:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Z}\{\sin \omega n\}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sin \omega n z^{-n} = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{i\omega n} - e^{-i\omega n}) z^{-n} \\
 &= \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{i\omega} z^{-1})^n - \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-i\omega} z^{-1})^n \\
 &= \frac{1}{2i} \frac{1}{1 - e^{i\omega} z^{-1}} - \frac{1}{2i} \frac{1}{1 - e^{-i\omega} z^{-1}} \\
 &= \frac{z}{2i} \frac{z - e^{-i\omega}}{(z - e^{i\omega})(z - e^{-i\omega})} - \frac{z}{2i} \frac{z + e^{i\omega}}{(z - e^{i\omega})(z - e^{-i\omega})} \\
 &= \frac{z \sin \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}
 \end{aligned}$$



## Il segnale $n^k$

(1/2)

Usando l'uguaglianza

$$-z \frac{d}{dz} z^{-n} = n z^{-n}$$

e applicandola  $k$  volte otteniamo

$$\left(-z \frac{d}{dz}\right)^k z^{-n} = \underbrace{\left(-z \frac{d}{dz}\right) \cdots \left(-z \frac{d}{dz}\right)}_{k \text{ volte}} z^{-n} = n^k z^{-n}$$

usando questa uguaglianza nella trasformata  $\mathcal{Z}\{f_n n^k\}(z)$  otteniamo

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Z}\{f_n n^k\}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n n^k z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left(-z \frac{d}{dz}\right)^k z^{-n} \\
 &= \left(-z \frac{d}{dz}\right)^k \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} = (-1)^k \left(z \frac{d}{dz}\right)^k \mathcal{Z}\{f_n\}(z)
 \end{aligned}$$



Il segnale  $n^k$ 

(2/2)

Usando la regola

$$\mathcal{Z}\{f_n n^k\}(z) = (-1)^k \left(z \frac{d}{dz}\right)^k \mathcal{Z}\{f_n\}(z)$$

e applicandola con  $f_n = \mathbf{1}_n$  otteniamo

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{n^k\}(z) &= (-1)^k \left(z \frac{d}{dz}\right)^k \mathcal{Z}\{\mathbf{1}_n\}(z) \\ &= (-1)^k \left(z \frac{d}{dz}\right)^k \frac{z}{z-1} \end{aligned}$$



## Una trasformata importante

(1/2)

Riconsideriamo il segnale  $n_k = n(n-1)\cdots(n-k+1)$  ed osserviamo che

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^k z^{-(n-k+1)} = (-1)^k n_k z^{-n-1}$$

usando questa uguaglianza possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{f_{n-k} n_k\}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_{n-k} n_k z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f_{n-k} (-1)^k z \left(\frac{d}{dz}\right)^k z^{-(n-k+1)} \\ &= (-1)^k z \left(\frac{d}{dz}\right)^k \left[ \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} f_{n-k} z^{-(n-k)} \right] \end{aligned}$$



# Una trasformata importante

(2/2)

Osservando che  $f_n = 0$  per  $n < 0$  otteniamo Riconsideriamo il segnale  $n_k = n(n - 1) \cdots (n - k + 1)$  ed osserviamo che

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{f_{n-k}n_k\}(z) &= (-1)^k z \left(\frac{d}{dz}\right)^k \left[\frac{1}{z} \sum_{m=-k}^{\infty} f_m z^{-m}\right] \\ &= (-1)^k z \left(\frac{d}{dz}\right)^k \left[\frac{1}{z} \mathcal{Z}\{f_n\}(z)\right] \end{aligned}$$



## Tabella delle trasformate

TABELLA DELLE TRASFORMATE (1/2)	
$\delta_n$	1
$\mathbf{1}_n$	$\frac{z}{z-1}$
$a^n$	$\frac{z}{z-a}$
$a^n f_n$	$\tilde{f}\left(\frac{z}{a}\right)$
$a^n \binom{n}{k}$	$\frac{a^k z}{(z-a)^{k+1}}$
$n^k f_n$	$(-1)^k \left(z \frac{d}{dz}\right)^k \tilde{f}(z)$



## TABELLA DELLE TRASFORMATE (2/2)

$f_{n+k}$	$z^k \left( \tilde{f}(z) - \sum_{j=0}^{k-1} f_j z^{-j} \right)$
$f_{n-k}$	$z^{-k} \tilde{f}(z)$
$(f \star g)_n$	$\tilde{f}(z) \tilde{g}(z)$
$a^n \sin \omega n$	$\frac{za \sin \omega}{z^2 - 2za \cos \omega + a^2}$
$a^n \cos \omega n$	$\frac{z^2 - za \cos \omega}{z^2 - 2za \cos \omega + a^2}$
$f_{n-k} n_k$	$(-1)^k z \frac{d^k}{dz^k} \left( \frac{1}{z} \tilde{f}(z) \right)$



## Teorema del valore iniziale e finale

## Teorema (Teorema del valore finale)

Se un segnale  $f_n$  raggiunge un limite costante, cioè

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f_\infty$$

allora vale

$$f_\infty = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z}{z-1} \tilde{f}_n(z)$$

## Teorema (Teorema del valore iniziale)

$$f_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} \tilde{f}_n(z)$$



## Forma standard della $Z$ -trasformata

- In molte applicazioni la  $Z$ -trasformata si può normalmente scrivere nella forma:

$$\frac{G(z)}{z} = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{b_0 + b_1z + b_2z^2 + \dots + b_mz^m}{(z - p_1)^{m_1}(z - p_2)^{m_2} \dots (z - p_n)^{m_n}}$$

dove  $p_i \neq p_j$  se  $i \neq j$ .

- Possiamo sempre assumere che  $\partial P(z) < \partial Q(z)$ .
- Come nel caso della trasformata di Laplace possiamo decomporre la trasformata in fratti semplici:

$$\frac{G(z)}{z} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{m_j} \frac{\alpha_{jk}}{(z - p_j)^k}$$



## Formula esplicita della soluzione

Avendo scritto  $G(z)$  come somma di fratti semplici come segue

$$G(z) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{m_j} \alpha_{ji} \frac{z}{(z - p_j)^i}$$

formalmente l'inversa diventa consultando la tabella delle trasformate:

$$G_n = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{m_j} \alpha_{ji} n_{i-1} p_j^n$$

Il problema di questa espressione è che se  $p_j$  è un numero complesso il termine corrispondente è una funzione a valori complessi della quale non abbiamo definito la  $Z$ -trasformata. In ogni caso essendo le radici complesse coniugate si può comunque usare questa espressione che produce una successione reale.



## Esempio: successione di Fibonacci

(1/3)

- La successione è definita ricorsivamente da

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad F_0 = F_1 = 1$$

Attenzione, se non si vogliono perdere le condizioni iniziali usare sempre lo shift in avanti

- Applicando la Z-trasformata e la regola dello shift

$$z^2 \tilde{F}(z) - F_0 z^2 - F_1 z = z \tilde{F}(z) - F_0 z + \tilde{F}(z)$$

- Risolvendo rispetto alla trasformata

$$\tilde{F}(z) = \frac{F_0 z^2 + (F_1 - F_0)z}{z^2 - z - 1}$$

- ponendo le condizioni iniziali:  $F_0 = F_1 = 1$

$$\tilde{F}(z) = \frac{z^2}{z^2 - z - 1}$$



## Esempio: successione di Fibonacci

(2/3)

- dalla decomposizione

$$z^2 - z - 1 = (z - z_1)(z - z_2), \quad z_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad z_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

- Dalla espansione in fratti semplici

$$\frac{\tilde{F}(z)}{z} = \frac{z}{z^2 - z - 1} = \frac{A}{z - z_1} + \frac{B}{z - z_2}$$

dove  $A = (5 + \sqrt{5})/10$  e  $B = (5 - \sqrt{5})/10$ , si ottiene

$$\tilde{F}(z) = \frac{Az}{z - z_1} + \frac{Bz}{z - z_2}$$



## Esempio: successione di Fibonacci

(3/3)

- Usando la trasformazione  $\mathcal{Z}\{a^n\}(z) = z/(z-a)$  otteniamo

$$F_n = Az_1^n + Bz_2^n$$

- sostituendo

$$z_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad z_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \quad A = \frac{5 + \sqrt{5}}{10}, \quad B = \frac{5 - \sqrt{5}}{10}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \end{aligned}$$



## Perchè bisogna usare lo shift in avanti ?

- Consideriamo la successione di fibonacci definita come

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad F_0 = F_1 = 1$$

- Qualunque sia la soluzione  $F_n$  gli shift  $G_n = F_{n-1}$  e  $H_n = F_{n-2}$  sono tali che  $G_0 = 0$  e  $H_0 = 0$ .
- Questo implica che  $F_0 = G_0 + H_0 = 0$  cioè le condizioni iniziali di fatto sono fissate e sono poste a zero.
- In pratica lo shift in avanti si può usare se le condizioni iniziali si sa già che sono tutte nulle.
- Una alternativa è usare la trasformata  $\mathcal{Z}$  bilatera

$$\mathcal{Z}\{f_n\}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n z^{-n} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N f_n z^{-n}$$





# Riferimenti



**Joel L. Schiff**

The Laplace Transform, theory and applications  
Springer-Verlag, 1999.



**U. Graf**

Applied Laplace Transforms and z-Transforms for Scientists  
and Engineers  
Birkhäuser, 2004.



**Anthony C. Grove**

An Introduction to the Laplace Transform and the Z  
Transform  
Prentice Hall, 1991.

