Inversione della trasformata di Laplace

(Metodi Matematici e Calcolo per Ingegneria)

Enrico Bertolazzi

DIMS – Università di Trento

anno accademico 2008/2009

Outline

1. Antitrasformata di Laplace
   - Formula di Bromwich-Mellin o di Riemann-Fourier
2. Forma standard della trasformata di Laplace
   - Decomposizione in fratti semplici
   - Trattamento delle radici complesse
3. Formula generale di inversione

Formula di Bromwich-Mellin o di Riemann-Fourier

Teorema (Inversione della trasformata)

Sia $f(t)$ una funzione trasformabile con trasformata $\widehat{f}(s)$ e ascissa di convergenza λ_0. Detto α un qualsiasi numero reale tale che $\alpha > \lambda_0$ vale

$$f(t) = \frac{1}{2\,\pi\imath} \lim_{\beta \to +\infty} \int_{\alpha - j\beta}^{\alpha + \imath\beta} e^{st} \widehat{f}(s)\,\mathrm{d}s$$

nei punti di continuità, dove $f(t)$ è discontinua vale

$$\frac{f(t+0) + f(t-0)}{2} = \frac{1}{2\,\pi\imath} \lim_{\beta \to +\infty} \int_{\alpha - j\beta}^{\alpha + \imath\beta} e^{st} \widehat{f}(s)\,\mathrm{d}s$$

La retta $x = \alpha$ nel piano di Gauss prende il nome di retta di Bromwich. Si noti che la formula non dipende dal valore di α purchè sia $\alpha > \lambda_0$.

La formula di Bromwich-Mellin non è molto comoda per il calcolo pratico della trasformata inversa. Consideriamo ad esempio la antitrasformata di $1/s$ che sappiamo essere la funzione di Heaviside:

$$
\begin{aligned}
h(t) &= \frac{1}{2\,\pi\imath} \lim_{\beta\to+\infty} \int_{\alpha-\imath\beta}^{\alpha+\imath\beta} \frac{e^{st}}{s}\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2\,\pi\imath} \lim_{\beta\to+\infty} \int_{-\beta}^{\beta} \frac{e^{(\alpha+\imath\gamma)t}}{\alpha+\imath\gamma}\,\imath d\gamma \\
&= \frac{e^{\alpha t}}{2\,\pi} \lim_{\beta\to+\infty} \int_{-\beta}^{\beta} \frac{\cos(\gamma t)(\alpha-\imath\gamma)+\sin(\gamma t)(\imath\alpha+\gamma)}{\alpha^2+\gamma^2} d\gamma
\end{aligned}
$$

sfruttando il fatto che $\sin(\gamma t)$ e $\gamma\cos(\gamma t)$ sono funzioni dispari rispetto a γ:

$$
h(t) = \frac{e^{\alpha t}}{2\,\pi} \lim_{\beta\to+\infty} \int_{-\beta}^{\beta} \frac{\alpha\cos(\gamma t)+\gamma\sin(\gamma t)}{\alpha^2+\gamma^2} d\gamma
$$

Gli integrali

$$h(t) = \frac{e^{\alpha t}}{2\,\pi} \lim_{\beta \to +\infty} \int_{-\beta}^{\beta} \frac{\alpha \cos(\gamma t) + \gamma \sin(\gamma t)}{\alpha^2 + \gamma^2} d\gamma$$

per $t \neq 0$ e

$$h(0) = \frac{1}{2\,\pi} \lim_{\beta \to +\infty} \int_{-\beta}^{\beta} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \gamma^2} d\gamma$$

per $t = 0$ sono difficili da calcolare. Usando ad esempio MAPLE otteniamo la soluzione

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 1/2 & \text{per } t = 0 \\ 1 & \text{per } t > 0 \end{cases}$$

- Il modo giusto di calcolare gli integrali precedenti è usare il metodo dei residui e l'analisi complessa.
- Anche con i residui il calcolo risulta piuttosto laborioso.
- In generale è molto più facile calcolare la trasformata che non l'antitrasformata.

Questa ultima considerazione permette di capire perché il metodo delle tabelle che vedremo in seguito è (in generale) il metodo più rapido per antitrasformare.

Forma standard della trasformata di Laplace (1/2)

- Nelle applicazioni elettriche o meccaniche la trasformata di Laplace si può normalmente scrivere nella forma:

$$G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \cdots + b_m s^m}{(s-p_1)^{m_1}(s-p_2)^{m_2}\cdots(s-p_n)^{m_n}}$$

  dove $p_i \neq p_j$ se $i \neq j$.

- Possiamo sempre assumere che $\partial P(s) < \partial Q(s)$ in caso contrario usando la divisione di polinomi con resto:

$$P(s) = Q(s)A(s) + B(s) \qquad \partial B(s) < \partial Q(s)$$

  e quindi

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = A(s) + \frac{B(s)}{Q(s)}$$

Forma standard della trasformata di Laplace (2/2)

- La antitrasformata di un polinomio

$$A(s) = a_0 + a_1 s + \cdots + a_n s^n$$

formalmente è la seguente

$$\mathcal{L}\left\{A(s)\right\}^{-1}(t) = a_0\delta(t) + a_1\delta^{(1)}(t) + \cdots + a_n\delta^{(n)}(t)$$

- Le "funzioni" $\delta^{(k)}(t)$ sono le derivate k-esime nel senso delle distribuzioni della delta di Dirac ed hanno la proprietà:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta^{(k)}(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^k f^{(k)}(0)$$

- A parte l'impulso unitario ($\delta(t)$) normalmente le derivate dell'impulso non si trovano nelle applicazioni considerate.
- Possiamo quindi considerare unicamente l'antitrasformata della funzione razionale $P(s)/Q(s)$ con $\partial P(s) < \partial Q(s)$.

Caso radici semplici

Data la funzione razionale nella variabile complessa s;

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \cdots + b_m s^m}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} \qquad (m < n)$$

dove $p_i \neq p_j$ se $i \neq j$. Possiamo riscrivere $G(s)$ come somma di fratti semplici

$$G(s) = \frac{\alpha_1}{s-p_1} + \frac{\alpha_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{s-p_n}$$

dove:

$$\alpha_i = \lim_{s \to p_i} (s-p_i) G(s)$$

infatti

$$(s-p_i)G(s) = \alpha_i + \sum_{j \neq i} \alpha_j \frac{s-p_i}{s-p_j}$$

Caso radici multiple

Nel caso di radici multiple ad esempio nel caso di una singola radice p di molteplicità n

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \cdots + b_m s^m}{(s-p)^n} \qquad (m < n)$$

Possiamo ancora riscrivere $G(s)$ come somma di fratti semplici come segue

$$G(s) = \frac{\alpha_1}{s-p} + \frac{\alpha_2}{(s-p)^2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{(s-p)^n}$$

dove $(0! = 1)$:

$$\alpha_{n-k} = \frac{1}{k!} \lim_{s \to p} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k}[(s-p)^n G(s)], \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

infatti

$$(s-p_i)^n G(s) = \alpha_1 (s-p)^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}(s-p) + \alpha_n$$

Caso generale

Nel caso generale

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \cdots + b_m s^m}{(s-p_1)^{m_1}(s-p_2)^{m_2}\cdots(s-p_k)^{m_n}} \qquad (m < m_1 + m_2 + \cdots + m_n)$$

dove m_i è la molteplicità della radice p_i. Possiamo ancora riscrivere $G(s)$ come somma di fratti semplici come segue

$$G(s) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{\alpha_{jk}}{(s-p_j)^k}$$

dove $(0! = 1)$:

$$\alpha_{j,m_j-k} = \frac{1}{k!} \lim_{s\to p_j} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k}\left[(s-p_j)^{m_j} G(s)\right], \qquad k = 0, 1, \ldots, m_j - 1$$

Formula esplicita della soluzione

Avendo scritto $G(s)$ come somma di fratti semplici come segue

$$G(s) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{\alpha_{jk}}{(s-p_j)^k}$$

formalmente l'inversa diventa consultando la tabella delle trasformate:

$$G(t) = \mathcal{L}\left\{G(s)\right\}^{-1}(t) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{\alpha_{jk}}{(k-1)!} e^{p_j t} t^{k-1}$$

Attenzione in questa espressione p_j in generale è un numero complesso il termine corrispondente è una funzione a valori complessi della quale non abbiamo definito la trasformata di Laplace.

Lemma

Sia $p_j = \overline{p}_i$ *allora vale* $m_i = m_j$ *e inoltre*

$$\alpha_{jk} = \overline{\alpha}_{ik} \qquad k = 1, 2, \ldots, m_i$$

Per prima cosa osserviamo che $\alpha_{jm_j} = \overline{\alpha_{im_i}}$:

$$\begin{aligned}\alpha_{jm_j} &= \lim_{s \to p_j} (s - p_j)^{m_j} G(s) = \overline{\lim_{s \to p_j} (\overline{s} - \overline{p}_j)^{m_j} G(\overline{s})} \\ &= \overline{\lim_{s \to \overline{p}_i} (\overline{s} - p_i)^{m_i} G(\overline{s})} = \overline{\lim_{s \to p_i} (s - p_i)^{m_i} G(s)} = \overline{\alpha_{im_j}}\end{aligned}$$

e per gli altri coefficienti in modo analogo

$$\begin{aligned}\alpha_{jm_j-k} &= \lim_{s \to p_j} \frac{\mathrm{d}^k[(s - p_j)^{m_j} G(s)]}{\mathrm{d}s^k} = \lim_{s \to p_j} \overline{\frac{\mathrm{d}^k[(\overline{s} - \overline{p}_j)^{m_j} G(\overline{s})]}{\mathrm{d}s^k}} \\ &= \lim_{s \to \overline{p}_i} \overline{\frac{\mathrm{d}^k[(\overline{s} - p_i)^{m_i} G(\overline{s})]}{\mathrm{d}s^k}} = \lim_{s \to p_i} \overline{\frac{\mathrm{d}^k[(s - p_i)^{m_i} G(s)]}{\mathrm{d}s^k}} = \overline{\alpha_{im_j-k}}\end{aligned}$$

Dal lemma precedente segue che nel caso di poli reali i coefficienti corrispondenti nello sviluppo in fratti semplici sono reali. Sia ora $G(s)$ con n radici dove le radici complesse vengono contate una volta sola allora abbiamo

$$G(s) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{1}{2} \left[\frac{\beta_{jk}}{(s-p_j)^k} + \frac{\overline{\beta_{jk}}}{(s-\overline{p_j})^k} \right]$$

dove

$$\beta_{jk} = \begin{cases} \alpha_{jk} & \text{se } \alpha_{jk} \text{ è un numero reale} \\ 2\alpha_{jk} & \text{se } \alpha_{jk} \text{ è un numero complesso} \end{cases}$$

a questo punto l'antitrasformata diventa

$$G(t) = \mathcal{L}\left\{G(s)\right\}^{-1}(t) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{\beta_{jk} e^{p_j t} + \overline{\beta_{jk}} e^{\overline{p_j} t}}{2(k-1)!} t^{k-1}$$

consideriamo ora $f(t) = \beta e^{pt} + \overline{\beta} e^{\overline{p}t}$ dove

$$\beta = a + \imath b, \qquad p = \gamma + \imath\omega,$$

allora avremo

$$\begin{aligned} f(t) &= (a+\imath b)e^{(\gamma+\imath\omega)t} + (a-\imath b)e^{(\gamma+\imath\omega)t} \\ &= e^{\gamma t}\big[(a+\imath b)(\cos(\omega t) + \imath\sin(\omega t)) \\ &\qquad +(a-\imath b)(\cos(\omega t) - \imath\sin(\omega t))\big] \\ &= e^{\gamma t}\big[2a\cos(\omega t) - 2b\sin(\omega t)\big] \end{aligned}$$

cioè in generale

$$f(t) = 2e^{\,\mathrm{Re}(p)t}\big[\,\mathrm{Re}\,(\beta)\cos(\,\mathrm{Im}\,(p)\,t) - \,\mathrm{Im}\,(\beta)\sin(\,\mathrm{Im}\,(p)\,t)\big]$$

Formula generale di inversione

- In generale se $G(s) = P(s)/Q(s)$ con $\partial P(s) \leq \partial Q(s)$ e $Q(s)$ che ha n radici distinte p_k di molteplicità m_k (le coppie di radici complesse conjugate si contano 1) scriverà come:

$$G(s) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{1}{2} \left[\frac{\beta_{jk}}{(s - p_j)^k} + \frac{\overline{\beta}_{jk}}{(s - \overline{p}_j)^k} \right]$$

- Usando le considerazioni dei lucidi precedenti e ponendo $r_k = \textsc{Re}\,(p_k)$ e $\omega_k = \textsc{Im}\,(p_k)$ otteniamo

$$G(t) = \sum_{j=1}^{n} e^{r_j t} \big[\textsc{Re}\,(P_j(t)) \cos(\omega_j t) - \textsc{Im}\,(P_j(t)) \sin(\omega_j t) \big]$$

dove

$$P_j(t) = \sum_{k=1}^{m_j} t^{k-1} \frac{\beta_{jk}}{(k-1)!}$$

Calcolo pratico dei coefficienti α_{ki} (2/2)

Moltiplicando l'espansione precedente per $Q(s)$ otteniamo una uguaglianza tra polinomi

$$P(s) = Q(s)G(s) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m_k} \frac{Q(s)}{2} \left[\frac{\alpha_{ki}}{(s-p_k)^i} + \frac{\overline{\alpha}_{ki}}{(s-\overline{p}_k)^i} \right]$$

I coefficienti α_{km_k} si ottengono immediatamente dalla relazione

$$P(p_k) = Q(p_k)G(p_k)$$

gli altri coefficienti si ottengono tramite derivazione e usando i risultati precedenti

$$\alpha_{j,m_k-j} := \text{risolve per } \alpha_{j,m_k-j} \qquad \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}s^j} P(s)\Big|_{s=p_k} = 0$$

per capire come funziona conviene fare un semplice esempio

Esempio Pratico molto complesso (1/10)

Vogliamo trovare l'espansione in fratti semplici del seguente polinomio razionale

$$\frac{s^2+s+1}{(s-1)(s-3)^3(s-(1+i))^2(s-(1-i))^2}$$

le radici sono ovviamente $p_1=1$, $p_2=3$, $p_3=1+i$ con molteplicità $m_1=1$, $m_2=3$ ed $m_3=2$. L'espansione in fratti semplici prende la forma (i fattori $1/2$ li metto sono alla fine)

$$G(s)=\frac{a}{s-1}+\frac{b_1}{s-3}+\frac{b_2}{(s-3)^2}+\frac{b_3}{(s-3)^3}$$
$$+\frac{c_1+id_1}{s-(1+i)}+\frac{c_1-id_1}{s-(1-i)}$$
$$+\frac{c_2+id_2}{(s-(1+i))^2}+\frac{c_2-id_2}{(s-(1-i))^2}$$

Esempio Pratico molto complesso

Calcoliamo ora

$$
\begin{aligned}
P(s)G(s) &= a(s-3)^3(s-(1+i))^2(s-(1-i))^2 \\
&+ b_1(s-1)(s-3)^2(s-(1+i))^2(s-(1-i))^2 \\
&+ b_2(s-1)(s-3)(s-(1+i))^2(s-(1-i))^2 \\
&+ b_3(s-1)(s-(1+i))^2(s-(1-i))^2 \\
&+ (c_1+id_1)(s-1)(s-3)^3(s-(1+i))(s-(1-i))^2 \\
&+ (c_1-id_1)(s-1)(s-3)^3(s-(1+i))^2(s-(1-i)) \\
&+ (c_2+id_2)(s-1)(s-3)^3(s-(1-i))^2 \\
&+ (c_2-id_2)(s-1)(s-3)^3(s-(1+i))^2
\end{aligned}
$$

Esempio Pratico molto complesso (3/10)

Espandendo i polinomi

$$
\begin{aligned}
Q(s)G(s) &= \big(a + b_1 + 2\,c_1\big)s^7 \\
&+ (2\,c_2 - 11\,b_1 + b_2 - 13\,a - 26\,c_1 - 2\,d_1)\,s^6 \\
&+ (-24\,c_2 - 8\,b_2 + b_3 - 4\,d_2 + 51\,b_1 + 71\,a + 24\,d_1 + 140\,c_1)\,s^5 \\
&+ (-116\,d_1 - 215\,a - 133\,b_1 - 408\,c_1 + 27\,b_2 - 5\,b_3 + 44\,d_2 + 112\,c_2)\,s^4 \\
&+ (12\,b_3 + 706\,c_1 + 400\,a - 52\,b_2 + 292\,d_1 + 216\,b_1 - 184\,d_2 - 252\,c_2)\,s^3 \\
&+ (60\,b_2 - 738\,c_1 - 16\,b_3 - 468\,a + 270\,c_2 - 220\,b_1 - 414\,d_1 + 360\,d_2)\,s^2 \\
&+ (324\,a + 12\,b_3 + 132\,b_1 - 108\,c_2 - 40\,b_2 + 432\,c_1 - 324\,d_2 + 324\,d_1)\,s \\
&-108\,a - 36\,b_1 + 12\,b_2 - 4\,b_3 - 108\,c_1 - 108\,d_1 + 108\,d_2
\end{aligned}
$$

Notate che è un polinomio a coefficienti reali in s.

Esempio Pratico molto complesso (4/10)

Calcoliamo ora i polinomi in $s = 1$ (la prima radice)

$$Q(1)G(1) = -8a, \qquad P(1) = 3, \qquad a = -\frac{3}{8}$$

Calcoliamo ora i polinomi in $s = 3$ (la seconda radice)

$$Q(3)G(3) = 50b_3, \qquad P(3) = 13, \qquad b_3 = \frac{13}{50}$$

Calcoliamo ora i polinomi in $s = 1 + i$ (la terza radice)

$$Q(1+i)G(1+i) = 44c_2 - 8d_2 + i(8c_2 + 44d_2), \quad P(1+i) = 2 + 3i,$$

da cui otteniamo il sistema

$$44c_2 - 8d_2 = 2, \qquad 8c_2 + 44d_2 = 3.$$

che risolto da come risultato $c_2 = 7/125$ e $d_2 = 29/500$.

Esempio Pratico molto complesso (5/10)

Calcoliamo ora

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(Q(s)G(s)) &= 7\ (a + b_1 + 2\,c_1)\, s^6 \\
&+6\ (2\,c_2 - 11\,b_1 + b_2 - 13\,a - 26\,c_1 - 2\,d_1)\, s^5 \\
&+5\ (-24\,c_2 - 8\,b_2 + b_3 - 4\,d_2 + 51\,b_1 + 71\,a + 24\,d_1 + 140\,c_1)\, s^4 \\
&+4\ (-116\,d_1 - 215\,a - 133\,b_1 - 408\,c_1 + 27\,b_2 - 5\,b_3 + 44\,d_2 + 112\,c_2)\, s^3 \\
&+3\ (12\,b_3 + 706\,c_1 + 400\,a - 52\,b_2 + 292\,d_1 + 216\,b_1 - 184\,d_2 - 252\,c_2)\, s^2 \\
&+2\ (60\,b_2 - 738\,c_1 - 16\,b_3 - 468\,a + 270\,c_2 - 220\,b_1 - 414\,d_1 + 360\,d_2)\, s \\
&+324\,a + 12\,b_3 + 132\,b_1 - 108\,c_2 - 40\,b_2 + 432\,c_1 - 324\,d_2 + 324\,d_1
\end{aligned}
$$

Esempio Pratico molto complesso (6/10)

Calcoliamo ora i polinomi in $s = 3$ (la seconda radice)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} Q(s)G(s)|_{s=3} = 50b_2 + 105b_3, \qquad P'(3) = 7,$$

usando il valore precedentemente calcolato $b_3 = -\frac{13}{50}$ otteniamo $b_2 = -203/500$. Calcoliamo ora i polinomi in $s = 1 + i$ (la terza radice)

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} Q(s)G(s)|_{s=1+i} &= 44\, c_1 - 8\, d_1 - 32\, c_2 + 124\, d_2 \\
&\quad + 8\, ic_1 + 44\, id_1 - 32\, id_2 - 124\, ic_2 \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} P(s)|_{s=1+i} &= 3 + 2i
\end{aligned}$$

mettendo a sistema e usando i valori di c_2 e d_2 otteniamo $c_1 = -6/625$ e $d_1 = 309/1250$.

Esempio Pratico molto complesso (7/10)

Calcoliamo ora

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}(Q(s)G(s)) = (42\,a + 42\,b_1 + 84\,c_1)\,s^5$$

$$+ (60\,c_2 - 330\,b_1 + 30\,b_2 - 390\,a - 780\,c_1 - 60\,d_1)\,s^4$$

$$+ (1420\,a - 480\,c_2 + 1020\,b_1 + 480\,d_1 + 2800\,c_1 + 20\,b_3 - 160\,b_2 - 80\,d_2)\,s^3$$

$$+ (-4896\,c_1 + 1344\,c_2 + 528\,d_2 - 2580\,a - 60\,b_3 - 1596\,b_1 - 1392\,d_1 + 324\,b_2)\,s^2$$

$$+ (72\,b_3 - 1512\,c_2 + 4236\,c_1 + 2400\,a + 1296\,b_1 - 312\,b_2 + 1752\,d_1 - 1104\,d_2)\,s$$

$$-936\,a + 540\,c_2 - 440\,b_1 + 720\,d_2 - 32\,b_3 - 828\,d_1 - 1476\,c_1 + 120\,b_2$$

Esempio Pratico molto complesso (8/10)

Calcoliamo ora i polinomi in $s = 3$ (la seconda radice)

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} Q(s)G(s)|_{s=3} = 100b_1 + 210b_2 + 184b_3, \qquad P''(3) = 2,$$

usando il valore precedentemente calcolato $b_3 = -\frac{13}{50}$ e $b_2 = -203/500$ otteniamo $b_1 = 1971/5000$.

Esempio Pratico molto complesso

Mettendo tutto assieme otteniamo

$$
\begin{aligned}
G(s) = {} & \frac{-3/8}{s-1} + \frac{1971}{5000(s-3)} + \frac{-203}{500(s-3)^2} + \frac{13}{50(s-3)^3} \\
& + \frac{-6/625 + 309/1250i}{s-(1+i)} + \frac{-6/625 - 309/1250i}{s-(1-i)} \\
& + \frac{7/125 + 29/500i}{(s-(1+i))^2} + \frac{7/125 - 29/500i}{(s-(1-i))^2}
\end{aligned}
$$

Esempio Pratico molto complesso (10/10)

E usando le relazioni sulle radici complesse coniugate

$$G(t) = e^{t}\,\frac{(560\,t-96)\cos(t)-(2472+580\,t)\sin(t)-1875}{5000}$$

$$+e^{3\,t}\,\frac{1971-2030\,t+650\,t^2}{5000}$$

Riferimenti

Joel L. Schiff
The Laplace Transform, theory and applications
Springer-Verlag, 1999.

U. Graf
Applied Laplace Transforms and z-Transforms for Scientists and Engineers
Birkh¨auser, 2004.

Spiegel Murray R.
Laplace transforms
Schaum's outline series, 1965.