

# Inversione della trasformata di Laplace

(Metodi Matematici e Calcolo per Ingegneria)

Enrico Bertolazzi

DIMS – Università di Trento

anno accademico 2008/2009



## Outline

- 1 Antitrasformata di Laplace
  - Formula di Bromwich-Mellin o di Riemann-Fourier
- 2 Forma standard della trasformata di Laplace
  - Decomposizione in fratti semplici
  - Trattamento delle radici complesse
- 3 Formula generale di inversione



# Formula di Bromwich-Mellin o di Riemann-Fourier

## Teorema (Inversione della trasformata)

Sia  $f(t)$  una funzione trasformabile con trasformata  $\hat{f}(s)$  e ascissa di convergenza  $\lambda_0$ . Detto  $\alpha$  un qualsiasi numero reale tale che  $\alpha > \lambda_0$  vale

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_{\alpha - j\beta}^{\alpha + j\beta} e^{st} \hat{f}(s) ds$$

nei punti di continuità, dove  $f(t)$  è discontinua vale

$$\frac{f(t+0) + f(t-0)}{2} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_{\alpha - j\beta}^{\alpha + j\beta} e^{st} \hat{f}(s) ds$$

La retta  $x = \alpha$  nel piano di Gauss prende il nome di retta di Bromwich. Si noti che la formula non dipende dal valore di  $\alpha$  purchè sia  $\alpha > \lambda_0$ .



La formula di Bromwich-Mellin non è molto comoda per il calcolo pratico della trasformata inversa. Consideriamo ad esempio la antitrasformata di  $1/s$  che sappiamo essere la funzione di Heaviside:

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_{\alpha - j\beta}^{\alpha + j\beta} \frac{e^{st}}{s} ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_{-\beta}^{\beta} \frac{e^{(\alpha + j\gamma)t}}{\alpha + j\gamma} j d\gamma \\ &= \frac{e^{\alpha t}}{2\pi} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_{-\beta}^{\beta} \frac{\cos(\gamma t)(\alpha - j\gamma) + \sin(\gamma t)(j\alpha + \gamma)}{\alpha^2 + \gamma^2} d\gamma \end{aligned}$$

sfruttando il fatto che  $\sin(\gamma t)$  e  $\gamma \cos(\gamma t)$  sono funzioni dispari rispetto a  $\gamma$ :

$$h(t) = \frac{e^{\alpha t}}{2\pi} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_{-\beta}^{\beta} \frac{\alpha \cos(\gamma t) + \gamma \sin(\gamma t)}{\alpha^2 + \gamma^2} d\gamma$$



Gli integrali

$$h(t) = \frac{e^{\alpha t}}{2\pi} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_{-\beta}^{\beta} \frac{\alpha \cos(\gamma t) + \gamma \sin(\gamma t)}{\alpha^2 + \gamma^2} d\gamma$$

per  $t \neq 0$  e

$$h(0) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_{-\beta}^{\beta} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \gamma^2} d\gamma$$

per  $t = 0$  sono difficili da calcolare. Usando ad esempio MAPLE otteniamo la soluzione

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 1/2 & \text{per } t = 0 \\ 1 & \text{per } t > 0 \end{cases}$$



- Il modo **giusto** di calcolare gli integrali precedenti è usare il metodo dei residui e l'analisi complessa.
- Anche con i residui il calcolo risulta piuttosto laborioso.
- In generale è molto più facile calcolare la trasformata che non l'antitrasformata.

Questa ultima considerazione permette di capire perché il metodo delle tabelle che vedremo in seguito è (in generale) il metodo più rapido per antitrasformare.



## Forma standard della trasformata di Laplace

(1/2)

- Nelle applicazioni elettriche o meccaniche la trasformata di Laplace si può normalmente scrivere nella forma:

$$G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_ms^m}{(s - p_1)^{m_1}(s - p_2)^{m_2} \dots (s - p_n)^{m_n}}$$

dove  $p_i \neq p_j$  se  $i \neq j$ .

- Possiamo sempre assumere che  $\partial P(s) < \partial Q(s)$  in caso contrario usando la divisione di polinomi con resto:

$$P(s) = Q(s)A(s) + B(s) \quad \partial B(s) < \partial Q(s)$$

e quindi

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = A(s) + \frac{B(s)}{Q(s)}$$



## Forma standard della trasformata di Laplace

(2/2)

- La antitrasformata di un polinomio

$$A(s) = a_0 + a_1s + \dots + a_ns^n$$

formalmente è la seguente

$$\mathcal{L} \{A(s)\}^{-1}(t) = a_0\delta(t) + a_1\delta^{(1)}(t) + \dots + a_n\delta^{(n)}(t)$$

- Le **“funzioni”**  $\delta^{(k)}(t)$  sono le derivate  $k$ -esime nel senso delle distribuzioni della delta di Dirac ed hanno la proprietà:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta^{(k)}(t) dt = (-1)^k f^{(k)}(0)$$

- A parte l'impulso unitario ( $\delta(t)$ ) normalmente le derivate dell'impulso non si trovano nelle applicazioni considerate.
- Possiamo quindi considerare unicamente l'antitrasformata della funzione razionale  $P(s)/Q(s)$  con  $\partial P(s) < \partial Q(s)$ .



## Caso radici semplici

Data la funzione razionale nella variabile complessa  $s$ ;

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_ms^m}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} \quad (m < n)$$

dove  $p_i \neq p_j$  se  $i \neq j$ . Possiamo riscrivere  $G(s)$  come somma di fratti semplici

$$G(s) = \frac{\alpha_1}{s - p_1} + \frac{\alpha_2}{s - p_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{s - p_n}$$

dove:

$$\alpha_i = \lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i)G(s)$$

infatti

$$(s - p_i)G(s) = \alpha_i + \sum_{j \neq i} \alpha_j \frac{s - p_i}{s - p_j}$$



## Caso radici multiple

Nel caso di radici multiple ad esempio nel caso di una singola radice  $p$  di molteplicità  $n$

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_ms^m}{(s - p)^n} \quad (m < n)$$

Possiamo ancora riscrivere  $G(s)$  come somma di fratti semplici come segue

$$G(s) = \frac{\alpha_1}{s - p} + \frac{\alpha_2}{(s - p)^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{(s - p)^n}$$

dove ( $0! = 1$ ):

$$\alpha_{n-k} = \frac{1}{k!} \lim_{s \rightarrow p} \frac{d^k}{ds^k} [(s - p)^n G(s)], \quad k = 0, 1, \dots, n - 1$$

infatti

$$(s - p_i)^n G(s) = \alpha_1 (s - p)^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} (s - p) + \alpha_n$$



## Caso generale

Nel caso generale

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_m s^m}{(s - p_1)^{m_1} (s - p_2)^{m_2} \dots (s - p_k)^{m_n}} \quad (m < m_1 + m_2 + \dots + m_n)$$

dove  $m_i$  è la molteplicità della radice  $p_i$ . Possiamo ancora riscrivere  $G(s)$  come somma di fratti semplici come segue

$$G(s) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{m_j} \frac{\alpha_{jk}}{(s - p_j)^k}$$

dove ( $0! = 1$ ):

$$\alpha_{j,m_j-k} = \frac{1}{k!} \lim_{s \rightarrow p_j} \frac{d^k}{ds^k} [(s - p_j)^{m_j} G(s)], \quad k = 0, 1, \dots, m_j - 1$$



## Formula esplicita della soluzione

Avendo scritto  $G(s)$  come somma di fratti semplici come segue

$$G(s) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{m_j} \frac{\alpha_{jk}}{(s - p_j)^k}$$

formalmente l'inversa diventa consultando la tabella delle trasformate:

$$G(t) = \mathcal{L} \{G(s)\}^{-1} (t) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{m_j} \frac{\alpha_{jk}}{(k-1)!} e^{p_j t} t^{k-1}$$

Attenzione in questa espressione  $p_j$  in generale è un numero complesso il termine corrispondente è una funzione a valori complessi della quale non abbiamo definito la trasformata di Laplace.



## Lemma

Sia  $p_j = \bar{p}_i$  allora vale  $m_i = m_j$  e inoltre

$$\alpha_{jk} = \bar{\alpha}_{ik} \quad k = 1, 2, \dots, m_i$$

Per prima cosa osserviamo che  $\alpha_{jm_j} = \overline{\alpha_{im_i}}$ :

$$\begin{aligned} \alpha_{jm_j} &= \lim_{s \rightarrow p_j} (s - p_j)^{m_j} G(s) = \overline{\lim_{s \rightarrow p_j} (\bar{s} - \bar{p}_j)^{m_j} G(\bar{s})} \\ &= \overline{\lim_{s \rightarrow \bar{p}_i} (\bar{s} - p_i)^{m_i} G(\bar{s})} = \overline{\lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i)^{m_i} G(s)} = \overline{\alpha_{im_i}} \end{aligned}$$

e per gli altri coefficienti in modo analogo

$$\begin{aligned} \alpha_{jm_j-k} &= \lim_{s \rightarrow p_j} \frac{d^k [(s - p_j)^{m_j} G(s)]}{ds^k} = \lim_{s \rightarrow p_j} \frac{d^k [(\bar{s} - \bar{p}_j)^{m_j} G(\bar{s})]}{ds^k} \\ &= \lim_{s \rightarrow \bar{p}_i} \frac{d^k [(\bar{s} - p_i)^{m_i} G(\bar{s})]}{ds^k} = \lim_{s \rightarrow p_i} \frac{d^k [(s - p_i)^{m_i} G(s)]}{ds^k} = \overline{\alpha_{im_i-k}} \end{aligned}$$



Dal lemma precedente segue che nel caso di poli reali i coefficienti corrispondenti nello sviluppo in fratti semplici sono reali. Sia ora  $G(s)$  con  $n$  radici dove le radici complesse vengono contate una volta sola allora abbiamo

$$G(s) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{m_j} \frac{1}{2} \left[ \frac{\beta_{jk}}{(s - p_j)^k} + \frac{\overline{\beta_{jk}}}{(s - \bar{p}_j)^k} \right]$$

dove

$$\beta_{jk} = \begin{cases} \alpha_{jk} & \text{se } \alpha_{jk} \text{ è un numero reale} \\ 2\alpha_{jk} & \text{se } \alpha_{jk} \text{ è un numero complesso} \end{cases}$$

a questo punto l'antitrasformata diventa

$$G(t) = \mathcal{L} \{G(s)\}^{-1}(t) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{m_j} \frac{\beta_{jk} e^{p_j t} + \overline{\beta_{jk}} e^{\bar{p}_j t}}{2(k-1)!} t^{k-1}$$



consideriamo ora  $f(t) = \beta e^{pt} + \bar{\beta} e^{\bar{p}t}$  dove

$$\beta = a + ib, \quad p = \gamma + i\omega,$$

allora avremo

$$\begin{aligned} f(t) &= (a + ib)e^{(\gamma+i\omega)t} + (a - ib)e^{(\gamma-i\omega)t} \\ &= e^{\gamma t} [(a + ib)(\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) \\ &\quad + (a - ib)(\cos(\omega t) - i \sin(\omega t))] \\ &= e^{\gamma t} [2a \cos(\omega t) - 2b \sin(\omega t)] \end{aligned}$$

cioè in generale

$$f(t) = 2e^{\operatorname{RE}(p)t} [\operatorname{RE}(\beta) \cos(\operatorname{IM}(p)t) - \operatorname{IM}(\beta) \sin(\operatorname{IM}(p)t)]$$



## Formula generale di inversione

- In generale se  $G(s) = P(s)/Q(s)$  con  $\partial P(s) \leq \partial Q(s)$  e  $Q(s)$  che ha  $n$  radici distinte  $p_k$  di molteplicità  $m_k$  (le coppie di radici complesse conjugate si contano 1) scriverà come:

$$G(s) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{m_j} \frac{1}{2} \left[ \frac{\beta_{jk}}{(s - p_j)^k} + \frac{\bar{\beta}_{jk}}{(s - \bar{p}_j)^k} \right]$$

- Usando le considerazioni dei lucidi precedenti e ponendo  $r_k = \operatorname{RE}(p_k)$  e  $\omega_k = \operatorname{IM}(p_k)$  otteniamo

$$G(t) = \sum_{j=1}^n e^{r_j t} [\operatorname{RE}(P_j(t)) \cos(\omega_j t) - \operatorname{IM}(P_j(t)) \sin(\omega_j t)]$$

dove

$$P_j(t) = \sum_{k=1}^{m_j} t^{k-1} \frac{\beta_{jk}}{(k-1)!}$$



Calcolo pratico dei coefficienti  $\alpha_{ki}$ 

(2/2)

Moltiplicando l'espansione precedente per  $Q(s)$  otteniamo una uguaglianza tra polinomi

$$P(s) = Q(s)G(s) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{m_k} \frac{Q(s)}{2} \left[ \frac{\alpha_{ki}}{(s-p_k)^i} + \frac{\bar{\alpha}_{ki}}{(s-\bar{p}_k)^i} \right]$$

I coefficienti  $\alpha_{km_k}$  si ottengono immediatamente dalla relazione

$$P(p_k) = Q(p_k)G(p_k)$$

gli altri coefficienti si ottengono tramite derivazione e usando i risultati precedenti

$$\alpha_{j,m_k-j} := \text{risolve per } \alpha_{j,m_k-j} \quad \frac{d^j}{ds^j} P(s) \Big|_{s=p_k} = 0$$

per capire come funziona conviene fare un semplice esempio



## Esempio Pratico molto complesso

(1/10)

Vogliamo trovare l'espansione in fratti semplici del seguente polinomio razionale

$$\frac{s^2 + s + 1}{(s-1)(s-3)^3(s-(1+i))^2(s-(1-i))^2}$$

le radici sono ovviamente  $p_1 = 1$ ,  $p_2 = 3$ ,  $p_3 = 1 + i$  con molteplicità  $m_1 = 1$ ,  $m_2 = 3$  ed  $m_3 = 2$ . L'espansione in fratti semplici prende la forma (i fattori 1/2 li metto sono alla fine)

$$\begin{aligned} G(s) = & \frac{a}{s-1} + \frac{b_1}{s-3} + \frac{b_2}{(s-3)^2} + \frac{b_3}{(s-3)^3} \\ & + \frac{c_1 + id_1}{s-(1+i)} + \frac{c_1 - id_1}{s-(1-i)} \\ & + \frac{c_2 + id_2}{(s-(1+i))^2} + \frac{c_2 - id_2}{(s-(1-i))^2} \end{aligned}$$



## Esempio Pratico molto complesso

(2/10)

Calcoliamo ora

$$\begin{aligned}
P(s)G(s) = & a(s-3)^3(s-(1+i))^2(s-(1-i))^2 \\
& + b_1(s-1)(s-3)^2(s-(1+i))^2(s-(1-i))^2 \\
& + b_2(s-1)(s-3)(s-(1+i))^2(s-(1-i))^2 \\
& + b_3(s-1)(s-(1+i))^2(s-(1-i))^2 \\
& + (c_1 + id_1)(s-1)(s-3)^3(s-(1+i))(s-(1-i))^2 \\
& + (c_1 - id_1)(s-1)(s-3)^3(s-(1+i))^2(s-(1-i)) \\
& + (c_2 + id_2)(s-1)(s-3)^3(s-(1-i))^2 \\
& + (c_2 - id_2)(s-1)(s-3)^3(s-(1+i))^2
\end{aligned}$$



## Esempio Pratico molto complesso

(3/10)

Espandendo i polinomi

$$\begin{aligned}
Q(s)G(s) = & (a + b_1 + 2c_1)s^7 \\
& + (2c_2 - 11b_1 + b_2 - 13a - 26c_1 - 2d_1)s^6 \\
& + (-24c_2 - 8b_2 + b_3 - 4d_2 + 51b_1 + 71a + 24d_1 + 140c_1)s^5 \\
& + (-116d_1 - 215a - 133b_1 - 408c_1 + 27b_2 - 5b_3 + 44d_2 + 112c_2)s^4 \\
& + (12b_3 + 706c_1 + 400a - 52b_2 + 292d_1 + 216b_1 - 184d_2 - 252c_2)s^3 \\
& + (60b_2 - 738c_1 - 16b_3 - 468a + 270c_2 - 220b_1 - 414d_1 + 360d_2)s^2 \\
& + (324a + 12b_3 + 132b_1 - 108c_2 - 40b_2 + 432c_1 - 324d_2 + 324d_1)s \\
& - 108a - 36b_1 + 12b_2 - 4b_3 - 108c_1 - 108d_1 + 108d_2
\end{aligned}$$

Notate che è un polinomio a coefficienti reali in  $s$ .

## Esempio Pratico molto complesso

(4/10)

Calcoliamo ora i polinomi in  $s = 1$  (la prima radice)

$$Q(1)G(1) = -8a, \quad P(1) = 3, \quad a = -\frac{3}{8}$$

Calcoliamo ora i polinomi in  $s = 3$  (la seconda radice)

$$Q(3)G(3) = 50b_3, \quad P(3) = 13, \quad b_3 = \frac{13}{50}$$

Calcoliamo ora i polinomi in  $s = 1 + i$  (la terza radice)

$$Q(1+i)G(1+i) = 44c_2 - 8d_2 + i(8c_2 + 44d_2), \quad P(1+i) = 2 + 3i,$$

da cui otteniamo il sistema

$$44c_2 - 8d_2 = 2, \quad 8c_2 + 44d_2 = 3.$$

che risolto da come risultato  $c_2 = 7/125$  e  $d_2 = 29/500$ .



## Esempio Pratico molto complesso

(5/10)

Calcoliamo ora

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(Q(s)G(s)) &= 7(a + b_1 + 2c_1)s^6 \\ &+ 6(2c_2 - 11b_1 + b_2 - 13a - 26c_1 - 2d_1)s^5 \\ &+ 5(-24c_2 - 8b_2 + b_3 - 4d_2 + 51b_1 + 71a + 24d_1 + 140c_1)s^4 \\ &+ 4(-116d_1 - 215a - 133b_1 - 408c_1 + 27b_2 - 5b_3 + 44d_2 + 112c_2)s^3 \\ &+ 3(12b_3 + 706c_1 + 400a - 52b_2 + 292d_1 + 216b_1 - 184d_2 - 252c_2)s^2 \\ &+ 2(60b_2 - 738c_1 - 16b_3 - 468a + 270c_2 - 220b_1 - 414d_1 + 360d_2)s \\ &+ 324a + 12b_3 + 132b_1 - 108c_2 - 40b_2 + 432c_1 - 324d_2 + 324d_1 \end{aligned}$$



## Esempio Pratico molto complesso

(6/10)

Calcoliamo ora i polinomi in  $s = 3$  (la seconda radice)

$$\frac{d}{ds} Q(s)G(s)|_{s=3} = 50b_2 + 105b_3, \quad P'(3) = 7,$$

usando il valore precedentemente calcolato  $b_3 = -\frac{13}{50}$  otteniamo  $b_2 = -203/500$ . Calcoliamo ora i polinomi in  $s = 1 + i$  (la terza radice)

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} Q(s)G(s)|_{s=1+i} &= 44c_1 - 8d_1 - 32c_2 + 124d_2 \\ &\quad + 8ic_1 + 44id_1 - 32id_2 - 124ic_2 \end{aligned}$$

$$\frac{d}{ds} P(s)|_{s=1+i} = 3 + 2i$$

mettendo a sistema e usando i valori di  $c_2$  e  $d_2$  otteniamo  $c_1 = -6/625$  e  $d_1 = 309/1250$ .



## Esempio Pratico molto complesso

(7/10)

Calcoliamo ora

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2} (Q(s)G(s)) &= (42a + 42b_1 + 84c_1) s^5 \\ &\quad + (60c_2 - 330b_1 + 30b_2 - 390a - 780c_1 - 60d_1) s^4 \\ &\quad + (1420a - 480c_2 + 1020b_1 + 480d_1 + 2800c_1 + 20b_3 - 160b_2 - 80d_2) s^3 \\ &\quad + (-4896c_1 + 1344c_2 + 528d_2 - 2580a - 60b_3 - 1596b_1 - 1392d_1 + 324b_2) s^2 \\ &\quad + (72b_3 - 1512c_2 + 4236c_1 + 2400a + 1296b_1 - 312b_2 + 1752d_1 - 1104d_2) s \\ &\quad - 936a + 540c_2 - 440b_1 + 720d_2 - 32b_3 - 828d_1 - 1476c_1 + 120b_2 \end{aligned}$$



## Esempio Pratico molto complesso

(8/10)

Calcoliamo ora i polinomi in  $s = 3$  (la seconda radice)

$$\frac{d^2}{ds^2} Q(s)G(s)|_{s=3} = 100b_1 + 210b_2 + 184b_3, \quad P''(3) = 2,$$

usando il valore precedentemente calcolato  $b_3 = -\frac{13}{50}$  e  $b_2 = -203/500$  otteniamo  $b_1 = 1971/5000$ .



## Esempio Pratico molto complesso

(9/10)

Mettendo tutto assieme otteniamo

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{-3/8}{s-1} + \frac{1971}{5000(s-3)} + \frac{-203}{500(s-3)^2} + \frac{13}{50(s-3)^3} \\ &+ \frac{-6/625 + 309/1250i}{s-(1+i)} + \frac{-6/625 - 309/1250i}{s-(1-i)} \\ &+ \frac{7/125 + 29/500i}{(s-(1+i))^2} + \frac{7/125 - 29/500i}{(s-(1-i))^2} \end{aligned}$$



E usando le relazioni sulle radici complesse coniugate

$$G(t) = e^t \frac{(560t - 96) \cos(t) - (2472 + 580t) \sin(t) - 1875}{5000} \\ + e^{3t} \frac{1971 - 2030t + 650t^2}{5000}$$



## Riferimenti

-  [Joel L. Schiff](#)  
The Laplace Transform, theory and applications  
Springer-Verlag, 1999.
-  [U. Graf](#)  
Applied Laplace Transforms and z-Transforms for Scientists  
and Engineers  
Birkhäuser, 2004.
-  [Spiegel Murray R.](#)  
Laplace transforms  
Schaum's outline series, 1965.

