

# La trasformata di Laplace

(Metodi Matematici e Calcolo per Ingegneria)

Enrico Bertolazzi

DIMS – Università di Trento

anno accademico 2008/2009  
(aggiornata al 21/09/2008)



# Outline

- 1 La trasformata di Laplace
- 2 Proprietà della Trasformata
  - Funzioni di ordine esponenziale
- 3 Calcolo di alcune trasformate
  - Trasformata della crescita polinomiale  $t^k u(t)$
  - Trasformata della crescita esponenziale  $a^{bt} u(t)$
  - Trasformazione delle derivate e integrali
- 4 Altre proprietà della trasformata di Laplace
  - Valori asintotici
- 5 Tabella delle trasformate
- 6 Esercizi sulle trasformate



Pierre-Simon Laplace, 1749-1827

# La trasformata di Laplace

- Definizione

$$f(t) \rightarrow \hat{f}(s) = \mathcal{L} \{f(t)\} (s)$$

$$\hat{f}(s) = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{-\epsilon}^M f(t)e^{-st} dt$$

- Utilità: trasforma

Equazioni differenziali  $\Rightarrow$  Equazioni algebriche

- Analogia con il logaritmo:

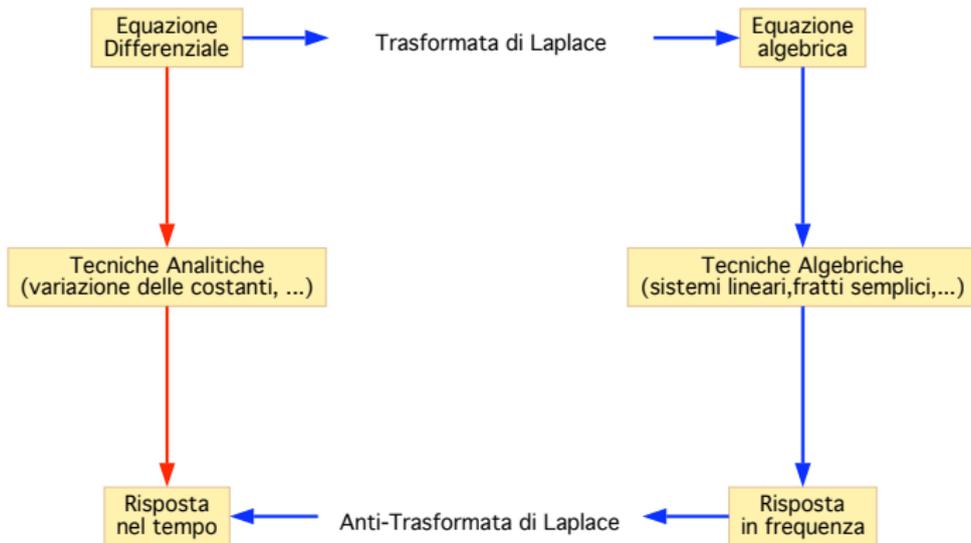
$$a \rightarrow \log a$$

$$a \cdot b \rightarrow \log a + \log b$$

cioè il logaritmo trasforma i **prodotti** in **somme** che sono più facili da maneggiare.



# Uso della trasformata di Laplace per risolvere ODE



# Proprietà della Trasformata

Tabella 1			
Linearità	$a f(t) + b g(t)$	$a \hat{f}(s) + b \hat{g}(s)$	1
Cambio di scala	$f(at)$	$\frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{s}{a}\right)$	2
Traslazione in $s$	$e^{at} f(t)$	$\hat{f}(s - a)$	3
Traslazione in $t$	$f(t - a)$	$e^{-as} \hat{f}(s)$	4

$a$  e  $b$  sono numeri reali. Inoltre  $a > 0$  nei punti 2 e 4.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\}(s) &= \int_{0^-}^{+\infty} (af(t) + bg(t))e^{-st} dt \\ &= a \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt + b \int_{0^-}^{+\infty} g(t)e^{-st} dt \\ &= a\hat{f}(s) + b\hat{g}(s)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(at)\}(s) &= \int_{0^-}^{+\infty} f(at)e^{-st} dt \quad [t = z/a, \quad a > 0] \\ &= \int_{0^-}^{+\infty} f(z)e^{-sz/a} \frac{dz}{a} \\ &= \frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{s}{a}\right)\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s) &= \int_{0^-}^{+\infty} e^{at}f(t)e^{-st} dt = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{(a-s)t} dt \\ &= \widehat{f}(s-a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t-a)\}(s) &= \int_{0^-}^{+\infty} f(t-a)e^{-st} dz && [t-a=z] \\ &= \int_{-a}^{+\infty} f(z)e^{-s(z+a)} dz && [f(z)=0 \text{ per } z \leq 0] \\ &= e^{-sa} \int_0^{+\infty} f(z)e^{-sz} dz \\ &= e^{-as}\widehat{f}(s)\end{aligned}$$



## Funzioni trasformabili

(1/3)

- Non tutte le funzioni sono trasformabili, ad esempio

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{t^2}\}(s) &= \int_{0^-}^{+\infty} e^{t^2-st} dt \\ &= \int_{0^-}^T e^{(t-s)t} dt + \int_T^{+\infty} e^{(t-s)t} dt\end{aligned}$$

per ogni valore di  $s$  scegliendo  $T > \operatorname{Re}(s)$  si ha che

$$\int_T^{+\infty} e^{(t-s)t} dt$$

non è convergente e quindi la funzione non è trasformabile per nessun valore di  $s$ .

## Funzioni trasformabili

(2/3)

Se  $f(t)$  è continua con limite di crescita:  $|f(t)| \leq Me^{Nt}$  per  $t \geq T$  allora è Laplace-trasformabile:

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_{0^-}^T f(t)e^{-st} dt + \int_T^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Infatti

$$\begin{aligned} \left| \int_T^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \right| &\leq \int_T^{+\infty} |f(t)e^{-st}| dt \leq \int_T^{+\infty} Me^{Nt} |e^{-st}| dt \\ &= \int_T^{+\infty} Me^{Nt} e^{-\operatorname{Re}(s)t} dt = M \int_T^{+\infty} e^{(N-\operatorname{Re}(s))t} dt \end{aligned}$$

ed per  $\operatorname{Re}(s) > N$  si ha che

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_T^{+\infty} e^{(N-\operatorname{Re}(s))t} dt = 0$$

# Funzioni trasformabili

(3/3)

## Definizione (Funzioni generalmente continue)

$f(t)$  è *generalmente continua* se per ogni intervallo  $[0, T]$

- è discontinua al più in un numero finito di punti
- la funzione è limitata

## Definizione (Funzioni di ordine esponenziale)

$f(t)$  è di *ordine esponenziale* se è *generalmente continua* con *limite di crescita*:

$$|f(t)| \leq Me^{Nt} \quad \text{per } t \geq T$$

Da ora in poi se non specificamente indicato assumiamo che le funzioni considerate siano di ordine esponenziale e con derivate generalmente continue fino all'ordine che a serve.

## Teorema (1)

Sia  $f(t)$  di ordine esponenziale allora vale:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \widehat{f}(s) = 0, \quad s \in \mathbb{R}$$

**Derivazione:** Assumendo  $s$  reale

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(s)| &= \left| \int_{0^-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \right| \leq \int_{0^-}^{\infty} |f(t)| e^{-st} dt \\ &\leq M \int_{0^-}^{\infty} e^{(N-s)t} dt = \frac{M}{s - N} \end{aligned}$$

ma

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{M}{s - N} = 0$$

# Trasformata della crescita polinomiale ed esponenziale

- Funzione di Heaviside

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0; \\ 1 & \text{se } t \geq 0. \end{cases}$$

- Crescita lineare

$$t_+ = t u(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0; \\ t & \text{se } t \geq 0. \end{cases}$$

- Crescita polinomiale

$$t_+^k = t^k u(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0; \\ t^k & \text{se } t \geq 0. \end{cases}$$

- Crescita esponenziale

$$v(t) = a^{bt} u(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0; \\ a^{bt} & \text{se } t \geq 0. \end{cases}$$

Tabella 2

1	$\frac{1}{s}$	5
$t$	$\frac{1}{s^2}$	6
$t^k$	$\frac{k!}{s^{k+1}}$	7
$a^{bt}$	$\frac{1}{s - b \log a}$	8

Attenzione, le funzioni a sinistra delle trasformate devono intendersi uguali a 0 per  $t < 0$ , cioè  $f(t) \rightarrow \hat{f}(s)$  in realtà è  $u(t)f(t) \rightarrow \hat{f}(s)$  dove  $u(t)$  è la funzione di Heaviside.

- Definizione della funzione di Heaviside

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0; \\ 1 & \text{se } t \geq 0. \end{cases}$$

- Trasformata (assumendo  $\text{RE}(s) > 0$ ):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{u\}(s) = \widehat{u}(s) &= \int_{0^-}^{+\infty} u(t)e^{-st} dt = \int_{0^-}^{+\infty} e^{-st} dt \\ &= \left[ -\frac{1}{s}e^{-st} \right]_{0^-}^{+\infty} = \frac{1}{s} \end{aligned}$$



- Definizione della funzione di crescita lineare

$$t_+ = t u(t)$$

- Trasformata (assumendo  $\text{RE}(s) > 0$ ):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t_+\}(s) &= \widehat{t_+}(s) = \int_{0^-}^{+\infty} t u(t) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{+\infty} t e^{-st} dt \\ &= \left[ -\frac{t}{s} e^{-st} \right]_{0^-}^{+\infty} + \frac{1}{s} \int_{0^-}^{+\infty} e^{-st} dt \\ &= 0 + \frac{1}{s} \left[ -\frac{1}{s} e^{-st} \right]_{0^-}^{+\infty} \\ &= \frac{1}{s^2}\end{aligned}$$



- Definizione della funzione di crescita polinomiale

$$t_+^k = t^k u(t)$$

- Trasformata (assumendo  $\text{RE}(s) > 0$ ):

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ t_+^k \right\} (s) &= \widehat{t_+^k}(s) = \int_{0^-}^{+\infty} t^k u(t) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{+\infty} t^k e^{-st} dt \\ &= \left[ -\frac{t^k}{s} e^{-st} \right]_{0^-}^{+\infty} + \frac{k}{s} \int_{0^-}^{+\infty} t^{k-1} e^{-st} dt \\ &= 0 + \frac{k}{s} \widehat{t_+^{k-1}}(s) \end{aligned}$$

- Usando l'induzione e tenendo conto che  $\widehat{t_+}(s) = \frac{1}{s^2}$  si ha

$$\widehat{t_+^k}(s) = \frac{k!}{s^{k+1}}$$



- Definizione della funzione di crescita esponenziale

$$v(t) = a^{bt} u(t)$$

- Trasformata (assumendo  $\text{Re}(s) > b \log a$ ):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{a^{bt}\}(s) &= \int_{0^-}^{+\infty} a^{bt} u(t) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{+\infty} a^{bt} e^{-st} dt \\ &= \int_{0^-}^{+\infty} e^{bt \log a} e^{-st} dt = \int_{0^-}^{+\infty} e^{(b \log a - s)t} dt \\ &= \left[ \frac{1}{(b \log a - s)} e^{(b \log a - s)t} \right]_{0^-}^{+\infty} \\ &= \frac{1}{s - b \log a}\end{aligned}$$



## trasformazione della derivata prima

(1/2)

## Teorema (Laplace trasformata della derivata prima)

Sia  $f(t)$  di ordine esponenziale con derivata generalmente continua. Allora la trasformata della derivata prima diventa:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = s\hat{f}(s) - f(0^+)$$

(assumiamo che  $f(t) = 0$  per  $t \leq 0$ )

**Derivazione:** Sia  $\text{Re}(s) > 0$  e  $\beta > 0$ :

$$\begin{aligned}\int_{\beta}^{+\infty} f'(t)e^{-st} dt &= [f(t)e^{-st}]_{\beta}^{+\infty} + s \int_{\beta}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \\ &= -f(\beta)e^{-s\beta} + s \int_{\beta}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt\end{aligned}$$



## trasformazione delle derivate prima

(2/2)

da cui abbiamo

$$\begin{aligned}\int_{-\epsilon}^{+\infty} f'(t)e^{-st} dt &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \left[ \int_{-\epsilon}^0 f'(t)e^{-st} dt + \int_{\beta}^{+\infty} f'(t)e^{-st} dt \right] \\ &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \left[ -f(\beta)e^{-s\beta} + s \int_{\beta}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt + 0 \right] \\ &= -f(0^+) + s \int_{0^+}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt\end{aligned}$$

poiché  $f(t) = 0$  per  $t \leq 0$  abbiamo  $\int_{-\epsilon}^0 f(t)e^{-st} dt = 0$  e quindi

$$\mathcal{L} \{ f'(t) \} (s) = -f(0^+) + s \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt.$$



trasformazione della derivata  $k$ -esimaTeorema (Laplace trasformata della derivata  $k$ -esima)

Sia  $f(t)$  con le sue derivate fino alla  $k - 1$  esima di ordine esponenziale e la derivata  $k$  esima generalmente continua. Allora la trasformata della derivata  $k$ -esima diventa:

$$\mathcal{L} \left\{ f^{(k)}(t) \right\} (s) = s^k \widehat{f}(s) - \sum_{i=0}^{k-1} s^i f^{(k-i-1)}(0^+).$$

(assumiamo che  $f(t) = 0$  per  $t \leq 0$ )

**Derivazione:** La derivazione è del tutto analoga alla derivazione per la derivata prima applicando  $k$  volte l'integrazione per parti.



## trasformazione dell'integrale

## Teorema (Laplace trasformata dell'integrale)

Sia  $f(t)$  generalmente continua, e  $g(t)$  definita come segue

$$g(t) = \int_0^t f(z) dz$$

la trasformata  $\mathcal{L}\{g(t)\}(s) = \widehat{g}(s)$  diventa:

$$\widehat{g}(s) = \frac{1}{s} \widehat{f}(s).$$

**Derivazione:** Basta applicare la regola di derivazione per la funzione  $g(t)$  e osservare che  $g'(t) = f(t)$  e  $g(0) = 0$ .



# Valori iniziali e finali

## Teorema (Teorema del valore iniziale)

*Sia  $f(t)$  di ordine esponenziale con derivata generalmente continua allora vale:*

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow +\infty} s \widehat{f}(s) \quad s \in \mathbb{R}$$

**Derivazione:** Dal teorema 1 applicato a  $f'(t)$  abbiamo

$$0 = \lim_{s \rightarrow +\infty} \mathcal{L} \{f'(t)\} (s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} s \widehat{f}(s) - f(0^+)$$

## Teorema (Teorema del valore finale)

Sia  $f(t)$  di ordine esponenziale con derivata generalmente continua se esiste il limite  $f(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$  allora vale:

$$f(+\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \widehat{f}(s) \quad s \in \mathbb{R}$$

**Derivazione:** Applicato la regola di trasformazione di  $f'(t)$  abbiamo

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \mathcal{L} \{f'(t)\} (s) = \lim_{s \rightarrow 0^+} s \widehat{f}(s) - f(0^+)$$

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0^+} \mathcal{L} \{f'(t)\} (s) &= \lim_{s \rightarrow 0^+} \int_{0^-}^{\infty} f'(t) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} f'(t) \lim_{s \rightarrow 0^+} e^{-st} dt \\ &= \int_{0^-}^{\infty} f'(t) dt = f(+\infty) - f(0^+) \end{aligned}$$

Il passaggio del limite sotto il segno di integrale si può fare per il teorema della convergenza dominata di Lebesgue.



- Moltiplicazione per  $t^n$

$$\mathcal{L} \{t^n f(t)\} (s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \hat{f}(s)$$

- Divisione per  $t$ . Sia  $g(t) = tf(t)$  allora per la formula precedente

$$\mathcal{L} \{g(t)\} (s) = -\frac{d}{ds} \mathcal{L} \{f(t)\} (s)$$

che può essere scritto come:  $\frac{d}{ds} \mathcal{L} \left\{ \frac{g(t)}{t} \right\} (s) = -\hat{g}(s)$  o meglio

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{g(t)}{t} \right\} (s) = -\int \hat{g}(s) ds + C = \hat{h}(s)$$

La costante complessa  $C$  va scelta in modo che  $\hat{h}(s)$  soddisfi i teoremi del valore iniziale e finale. Ovviamente  $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t)/t$  deve esistere ed essere finito.



### Teorema (Traformazione di funzioni periodiche)

Sia  $f(t + T) = f(t)$  per  $t > 0$  allora vale

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{\int_0^T f(t)e^{-st} dt}{1 - e^{-sT}}$$

### Teorema (Traformazione del prodotto di convoluzione)

Sia  $(f \star g)(t)$  definita come segue:

$$(f \star g)(t) = \int_0^t f(z)g(t - z) dz$$

allora vale

$$\mathcal{L}\{f \star g\}(s) = \hat{f}(s)\hat{g}(s)$$

Tabella 3

$\int_0^t f(z) dz$	$\frac{1}{s} \widehat{f}(s)$	9
$f'(t)$	$s \widehat{f}(s) - f(0^+)$	10
$f''(t)$	$s^2 \widehat{f}(s) - f'(0^+) - s f(0^+)$	11
$\frac{d^n}{dt^n} f(t)$	$s^n \widehat{f}(s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^{n-j-1} f^{(j)}(0^+)$	12
$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \widehat{f}(s)$	13
$(f \star g)(t)$	$\widehat{f}(s) \widehat{g}(s)$	14

Tabella 4

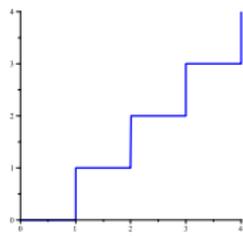
$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{s - a}{(s - a)^2 + \omega^2}$	15
$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s - a)^2 + \omega^2}$	16
$e^{at} \cosh \omega t$	$\frac{s - a}{(s - a)^2 - \omega^2}$	17
$e^{at} \sinh \omega t$	$\frac{\omega}{(s - a)^2 - \omega^2}$	18
$e^{at} t^n$	$\frac{n!}{(s - a)^{n+1}}$	19
$e^{\alpha t} - e^{\beta t}$	$\frac{\alpha - \beta}{(s - \alpha)(s - \beta)}$	20



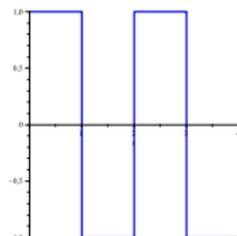
$$\textcircled{1} f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ n & n \leq t < n+1 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} g(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ +1 & 2n \leq t < 2n+1 \\ -1 & 2n+1 \leq t < 2n+2 \end{cases}$$

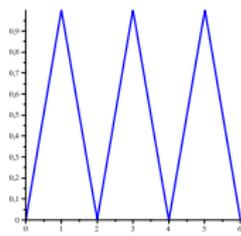
$$\textcircled{3} h(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t-2n & 2n \leq t < 2n+1 \\ 2n+2-t & 2n+1 \leq t < 2n+2 \end{cases}$$



$$\hat{f}(s) = \frac{e^{-s}}{(e^s - 1)s};$$



$$\hat{g}(s) = \frac{1 e^s - 1}{s e^s + 1};$$

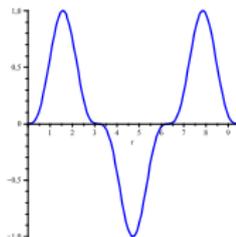
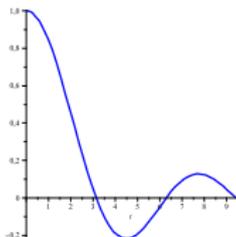
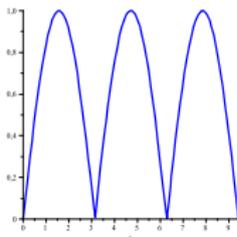


$$\hat{h}(s) = \frac{1 e^s - 1}{s^2 e^s + 1}$$

$$\textcircled{1} f(t) = |\sin(t)|$$

$$\textcircled{2} g(t) = \frac{\sin(t)}{t}$$

$$\textcircled{3} h(t) = \sin(t)^3$$



$$\widehat{f}(s) = \frac{1}{1+s^2} \frac{e^{\pi s} + 1}{e^{\pi s} - 1}; \quad \widehat{g}(s) = \arctan(s);$$

$$\widehat{h}(s) = \frac{6}{(s^2 + 1)(s^2 + 9)}$$

# Riferimenti



Joel L. Schiff

The Laplace Transform, theory and applications  
Springer-Verlag, 1999.



U. Graf

Applied Laplace Transforms and z-Transforms for Scientists  
and Engineers  
Birkh"user, 2004.



Spiegel Murray R.

Laplace transforms  
Schaum's outline series, 1965.