Sopravviveranno gli indiani Natchez?

Lorenzo Farina

15 novembre 2004

La società degli indiani d'America della tribù dei Natchez (sterminata dalle truppe francesi nel 1703), era divisa in tre classi gerarchiche. Le tre classi sono qui indicate dalle lettere A, B, e C. Si partiziona, quindi, la popolazione in queste tre classi.

Si vuole studiare l'andamento temporale della popolazione totale a partire da un gruppo di individui (*coorte*) Per fare questo si faranno le seguenti assunzioni:

1. C'e' un ugual numero di uomini e donne in ogni classe e ad ogni generazione
2. Ogni generazione è distinta dalle altre, nel senso che i sopravvissuti della generazione precedente non possono avere figli[1]
3. Ogni individuo (uomo o donna) delle classi A e B sceglie il proprio partner nella classe C
4. Tutti gli individui della classe C non scelti da nessun individuo delle classi dominanti A e B, si sposano tra loro[2]
5. Ciascuna coppia, nel corso della loro vita, genera un numero di figlie pari ad α_j (fertilità) *dipendentemente* dal tipo di matrimonio (si veda la tabella successiva)

[1] La durata di una generazione si può assumere pari alla durata media della vita fertile delle donne.

[2] Questo è possibile dall'ipotesi 1: cioè ad ogni generazione tutti gli individui appartenenti a tale generazione, hanno la possibilità di sposarsi (e lo fanno necessariamente).

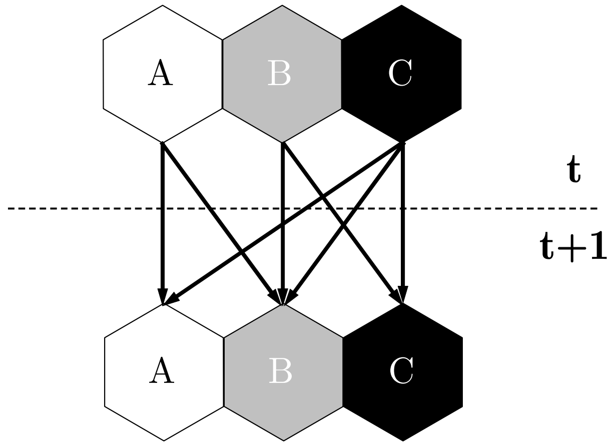

Figura 1: Passaggi di classe di generazione in generazione

Si indichi con x_i^F il numero di donne presenti nella classe i (con $i = 1, 2, 3$). Ma, essendoci un ugual numero di uomini e donne in ciascuna classe, si poteva anche equivalentemente scegliere, come variabile di stato, il numero di uomini presenti nella classe i. Pertanto:

- $x_i^F(t) \rightarrow$ numero di donne presenti nella classe i dopo t generazioni

Le regole matrimoniali sono descritte dalla seguente tabella (discendenza *matrilineare*):

Padre

Madre		A	B	C
	A	-	-	A, α_1
	B	-	-	B, α_3
	C	B, α_2	C, α_4	C, α_5

Dalla tabella precedente, si ottengono così le equazioni:

- i figli della classe A provengono solo da matrimoni fra madre A e padre C, *siccome è la classe A che sceglie il proprio partner in C*, si può scrivere:

$$x_A^F(t+1) = \alpha_1 x_A^F(t)$$

- Allo stesso modo, siccome i figli della classe B provengono da un padre di classe A o da una madre di classe B, si può scrivere (ricordando l'ipotesi di uguaglianza fra il numero di uomini e donne ad ogni generazione):

$$x_B^F(t+1) = \alpha_2 x_A^M(t) + \alpha_3 x_B^F(t) = \alpha_2 x_A^F(t) + \alpha_3 x_B^F(t)$$

- Infine, i figli di classe C provengono da un padre di classe B o di classe C, eccetto quelli che sposano donne di classe A o B, pertanto:

$$\begin{aligned} x_C^F(t+1) &= \alpha_4 x_B^M(t) + \alpha_5 \left[x_C^F(t) - x_A^F(t) - x_B^F(t)\right] = \\ &= \alpha_4 x_B^F(t) + \alpha_5 \left[x_C^F(t) - x_A^F(t) - x_B^F(t)\right] \end{aligned}$$

La popolazione complessiva ad ogni generazione sarà data da

$$y(t) = 2\left[x_A^F(t) + x_B^F(t) + x_C^F(t)\right]$$

In forma matriciale

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & 0 \\ -\alpha_5 & \alpha_4 - \alpha_5 & \alpha_5 \end{pmatrix} x(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} x(t) \end{aligned}$$

dove si è posto

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_A^F(t) \\ x_B^F(t) \\ x_C^F(t) \end{pmatrix}$$

Affinchè il modello rappresenti una situazione reale è necessario inoltre che

$$x_C^F(t) \geq 0,\ x_A^F(t) \geq 0,\ x_B^F(t) \geq 0 \qquad \forall t$$

e

$$x_C^F(t) \geq x_A^F(t) + x_B^F(t) \qquad \forall t$$

Essendo l'ultima equazione (cioè quella relativa alla classe C) l'unica ad avere termini negativi, è chiaro che un tale modello di società sarebbe in generale destinata, sul lungo termine, a non avere più individui nella classe più bassa e quindi ad estinguersi[3]. In termini storici non è possibile verificare tale conclusione, perchè non ci sono dati sulla popolazione gli indiani Natchez prima che venissero scoperti e distrutti dagli esploratori francesi. E' lecito però supporre che gli indiani Natchez siano vissuti abbastanza a lungo (esistono testimonianze archeologiche di una loro presenza nella valle del basso Mississippi fin dal 700 a.C.) e pertanto la previsione sulla loro estinzione sembra fallire. Pertanto, il *problema degli indiani Natchez* è il seguente:

<<*esistono dei valori di fertilità per ciascun tipo di matrimonio compatibili con una società stabile?*>>

L'intuizione suggerirebbe che la soluzione del problema degli indiani Natchez sia ottenibile aumentando la fertilità della classe più bassa. Ma l'analisi dimostra che è vero il contrario. Vediamo perchè.

La matrice dinamica del sistema è

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & 0 \\ -\alpha_5 & \alpha_4 - \alpha_5 & \alpha_5 \end{pmatrix}$$

gli autovalori sono $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5$ e i corrispondenti autovettori sono

$$\begin{aligned} u_1 &= \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_2} \\ 1 \\ \dfrac{\alpha_2 (\alpha_4 - \alpha_5) - \alpha_5 (\alpha_1 - \alpha_3)}{\alpha_2 (\alpha_1 - \alpha_5)} \end{pmatrix} \leftrightarrow \alpha_1 \\ u_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{\alpha_3 - \alpha_5}{\alpha_4 - \alpha_5} \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \alpha_3, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \alpha_5 \end{aligned}$$

Siccome, in generale,

$$A^t x(0) = c_1 \alpha_1^t u_1 + c_2 \alpha_3^t u_2 + c_3 \alpha_5^t u_3$$

per valori di t sufficientemente grandi, si ottiene

$$A^t x(0) \approx c_i \alpha_i^t u_i$$

[3] Per esempio se le fertilità fossero tutte uguali, e cioè $\alpha_j = 1$, e assumendo come stato iniziale $x(0) = \begin{pmatrix} c & c & c \end{pmatrix}^T$, dopo la prima generazione, si avrebbe subito $x_3(1) = 0$.

dove α_i è il più grande fra gli autovalori di A, cioè il più 'lento' a decadere (se in modulo minore di 1) o il più 'veloce' a crescere (se in modulo maggiore di 1), fra i modi naturali. L'autovettore corrispondente si chiama *autovettore dominante*, cioè l'autovettore corrispondente all'autovalore di modulo massimo. Siccome sia u_2 che u_3 contengono almeno uno zero, si deve escludere che questi siano dominanti. Perciò, l'autovettore dominante è necessariamente u_1 e quindi l'autovalore dominante è α_1. Quest'ultima condizione impone

$$\begin{aligned} \alpha_1 &> \alpha_3 \\ \alpha_1 &> \alpha_5 \end{aligned}$$

La condizione di positività per u_3 impone inoltre:

$$\alpha_2 (\alpha_4 - \alpha_5) > \alpha_5 (\alpha_1 - \alpha_3) \rightarrow \alpha_5 < \frac{\alpha_2 \alpha_4}{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3}$$

Si vede che la terza disequzione è soddisfatta per valori abbastanza *piccoli* di α_5. Così il problema degli indiani Natchez è risolubile per piccoli valori della natalità della classe più bassa, diversamente da quanto l'intuizione poteva suggerire, come detto all'inizio.

Si noti che in realtà si deve imporre la positività della risposta libera per ogni t. Dei valori ammissibili sono:

$$\alpha_1 = 1.1, \;\; \alpha_2 = 1.0, \;\; \alpha_3 = 1.0, \;\; \alpha_4 = 1.3, \;\; \alpha_5 = 0.9$$