

La trasformata di Laplace

(Metodi Matematici e Calcolo per Ingegneria)

Enrico Bertolazzi

DIMS – Università di Trento

anno accademico 2006/2007



Outline

- 1 La trasformata di Laplace
- 2 Proprietà della Trasformata
- 3 Calcolo di alcune trasformate
 - Trasformata della funzione di Heaviside $u(t)$
 - Trasformata della crescita polinomiale $t^k u(t)$
 - Trasformata della crescita esponenziale $a^{bt} u(t)$
 - Funzioni trasformabili
 - Trasformazione delle derivate e integrali
- 4 Altre proprietà della trasformata di Laplace
- 5 Tabella delle trasformate
- 6 Antitrasformata di Laplace
 - Decomposizione in fratti semplici



Proprietà della Trasformata

- Linearità

$$\mathcal{L} \{af(t) + bg(t)\} (s) = a\hat{f}(s) + b\hat{g}(s)$$

- Traslazione

$$\mathcal{L} \{e^{at}f(t)\} (s) = \hat{f}(s - a)$$

$$\mathcal{L} \{f(t - a)\} (s) = e^{-as}\hat{f}(s)$$

- Cambio di scala

$$\mathcal{L} \{f(at)\} (s) = \frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{s}{a}\right)$$



Linearità e Cambio di scala

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{af(t) + bg(t)\} (s) &= \int_{0^-}^{+\infty} (af(t) + bg(t))e^{-st} dt \\ &= a \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt + b \int_{0^-}^{+\infty} g(t)e^{-st} dt \\ &= a\hat{f}(s) + b\hat{g}(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{f(at)\} (s) &= \int_{0^-}^{+\infty} f(at)e^{-st} dt \quad [t = z/a] \\ &= \int_{0^-}^{+\infty} f(z)e^{-sz/a} \frac{dz}{a} \\ &= \frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{s}{a}\right) \end{aligned}$$



Traslazione

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s) &= \int_{0^-}^{+\infty} e^{at}f(t)e^{-st} dt \\ &= \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{(a-s)t} dt \\ &= \widehat{f}(s-a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t-a)\}(s) &= \int_{0^-}^{+\infty} f(t-a)e^{-st} dz \quad [t-a=z] \\ &= \int_{-z}^{+\infty} f(z)e^{-s(z+a)} dz \quad [f(z)=0 \text{ per } z \leq 0] \\ &= e^{-sa} \int_0^{+\infty} f(z)e^{-sz} dz\end{aligned}$$

Trasformata della funzione di Heaviside $u(t)$

- Definizione della funzione di Heaviside

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0; \\ 1 & \text{se } t \geq 0. \end{cases}$$

- Trasformata (assumendo $\text{RE}(s) > 0$):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{u\}(s) = \widehat{u}(s) &= \int_{0^-}^{+\infty} u(t)e^{-st} dt = \int_{0^-}^{+\infty} e^{-st} dt \\ &= \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_{0^-}^{+\infty} = \frac{1}{s}\end{aligned}$$



Trasformata della crescita lineare $(t)_+$

- Definizione della funzione di crescita lineare

$$(t)_+ = t u(t) \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0; \\ t & \text{se } t \geq 0. \end{cases}$$

- Trasformata (assumendo $\text{RE}(s) > 0$):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{(t)_+\}(s) &= \widehat{(t)_+}(s) = \int_{0^-}^{+\infty} t u(t) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{+\infty} t e^{-st} dt \\ &= \left[-\frac{t}{s} e^{-st} \right]_{0^-}^{+\infty} + \frac{1}{s} \int_{0^-}^{+\infty} e^{-st} dt \\ &= 0 + \frac{1}{s} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_{0^-}^{+\infty} = \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$



Trasformata della crescita polinomiale $t^k u(t)$

- Definizione della funzione di crescita polinomiale

$$(t)_+^k = t^k u(t) \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0; \\ t^k & \text{se } t \geq 0. \end{cases}$$

- Trasformata (assumendo $\text{RE}(s) > 0$):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{(t)_+^k\}(s) &= \widehat{(t)_+^k}(s) = \int_{0^-}^{+\infty} t^k u(t) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{+\infty} t^k e^{-st} dt \\ &= \left[-\frac{t^k}{s} e^{-st} \right]_{0^-}^{+\infty} + \frac{k}{s} \int_{0^-}^{+\infty} t^{k-1} e^{-st} dt \\ &= 0 + \frac{k}{s} \mathcal{L}\{(t)_+^{k-1}\}(s) \end{aligned}$$

- Usando l'induzione e tenendo conto che $\widehat{(t)_+}(s) = \frac{1}{s^2}$ si ha

$$\widehat{(t)_+^k}(s) = \frac{k!}{s^{k+1}}$$



Trasformata della crescita esponenziale $a^{bt}u(t)$

- Definizione della funzione di crescita esponenziale

$$v(t) = a^{bt} u(t) \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0; \\ a^{bt} & \text{se } t \geq 0. \end{cases}$$

- Trasformata (assumendo $\text{RE}(s) > b \log a$):

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{ a^{bt} \} (s) &= \int_{0^-}^{+\infty} a^{bt} u(t) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{+\infty} a^{bt} e^{-st} dt \\ &= \int_{0^-}^{+\infty} e^{bt \log a} e^{-st} dt = \int_{0^-}^{+\infty} e^{(b \log a - s)t} dt \\ &= \left[\frac{1}{(b \log a - s)} e^{(b \log a - s)t} \right]_{0^-}^{+\infty} \\ &= \frac{1}{s - b \log a} \end{aligned}$$



Funzioni trasformabili

(1/2)

- Non tutte le funzioni sono trasformabili, ad esempio

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{ e^{t^2} \} (s) &= \int_{0^-}^{+\infty} e^{t^2 - st} dt \\ &= \int_{0^-}^T e^{(t-s)t} dt + \int_T^{+\infty} e^{(t-s)t} dt \end{aligned}$$

per ogni valore di s scegliendo $T > \text{RE}(s)$ si ha che $\int_T^{+\infty} e^{(t-s)t} dt$ non è convergente e quindi la funzione non è trasformabile per nessun valore di s .



Funzioni trasformabili

(2/2)

Se $f(t)$ è generalmente continua con limite di crescita:
 $|f(t)| \leq Me^{Nt}$ per $t \geq T$ allora è Laplace-trasformabile:

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_{0^-}^T f(t)e^{-st} dt + \int_T^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Infatti

$$\begin{aligned} \left| \int_T^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \right| &\leq \int_T^{+\infty} |f(t)e^{-st}| dt \leq \int_T^{+\infty} Me^{Nt} |e^{-st}| dt \\ &= \int_T^{+\infty} Me^{Nt} e^{-\operatorname{Re}(s)t} dt = M \int_T^{+\infty} e^{(N-\operatorname{Re}(s))t} dt \end{aligned}$$

ed per $\operatorname{Re}(s) > N$ si ha che

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_T^{+\infty} e^{(N-\operatorname{Re}(s))t} dt = 0$$



trasformazione della derivata prima

(1/2)

Teorema (Laplace trasformata della derivata prima)

Sia $f \in C^1(0, +\infty)$, ed esista il limite $f(0^+) = \lim_{\beta \downarrow 0} f(\beta)$ finito.
 Allora la trasformata della derivata prima diventa:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = s\hat{f}(s) - f(0^+)$$

(assumiamo che $f(t) = 0$ per $t \leq 0$)

Derivazione: Sia $\operatorname{Re}(s) > 0$ e $\beta > 0$:

$$\begin{aligned} \int_{\beta}^{+\infty} f'(t)e^{-st} dt &= [f(t)e^{-st}]_{\beta}^{+\infty} + s \int_{\beta}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \\ &= -f(\beta)e^{-s\beta} + s \int_{\beta}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \end{aligned}$$



trasformazione delle derivata prima

(2/2)

da cui abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{-\epsilon}^{+\infty} f'(t)e^{-st} dt &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \left[\int_{-\epsilon}^0 f'(t)e^{-st} dt + \int_{\beta}^{+\infty} f'(t)e^{-st} dt \right] \\ &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \left[-f(\beta)e^{-s\beta} + s \int_{\beta}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt + 0 \right] \\ &= -f(0^+) + s \int_{0^+}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \end{aligned}$$

poiché $f(t) = 0$ per $t \leq 0$ abbiamo $\int_{-\epsilon}^0 f(t)e^{-st} dt = 0$ e quindi

$$\mathcal{L} \{ f'(t) \} (s) = -f(0^+) + s \int_{0^+}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

trasformazione della derivata k -esimaTeorema (Laplace trasformata della derivata k -esima)

Sia $f \in \mathcal{C}^k(0, +\infty)$, ed esista il limite $f^{(j)}(0^+) = \lim_{\beta \downarrow 0} f^{(j)}(\beta)$ finito per $j = 0, 1, \dots, k-1$. Allora la trasformata della derivata k -esima diventa:

$$\mathcal{L} \{ f^{(k)}(t) \} (s) = s^k \widehat{f}(s) - \sum_{i=0}^{k-1} s^i f^{(k-i-1)}(0^+).$$

(assumiamo che $f(t) = 0$ per $t \leq 0$)

Derivazione: La derivazione è del tutto analoga alla derivazione per la derivata prima applicando k volte l'integrazione per parti.



trasformazione dell'integrale

Teorema (Laplace trasformata dell'integrale)

Sia $f(t)$ regolare a tratti, e $g(t)$ definita come segue

$$g(t) = \int_0^t f(z) dz$$

la trasformata $\mathcal{L}\{g(t)\}(s) = \widehat{g}(s)$ diventa:

$$\widehat{g}(s) = \frac{1}{s} \widehat{f}(s).$$

Derivazione: Basta applicare la regola di derivazione per la funzione $g(t)$ e osservare che $g'(t) = f(t)$ e $g(0) = 0$.



Valori iniziali e finali

Teorema (Teorema del valore iniziale)

$$\lim_{t \downarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} s \widehat{f}(s) \quad s \in \mathbb{R}$$

Teorema (Teorema del valore finale)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \widehat{f}(s) \quad s \in \mathbb{R}$$



- Moltiplicazione per t^n

$$\mathcal{L} \{t^n f(t)\} (s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \hat{f}(s)$$

- Divisione per t . Sia $g(t) = tf(t)$ allora per la formula precedente

$$\mathcal{L} \{g(t)\} (s) = -\frac{d}{ds} \mathcal{L} \{f(t)\} (s)$$

che può essere scritto come: $\frac{d}{ds} \mathcal{L} \left\{ \frac{g(t)}{t} \right\} (s) = -\hat{g}(s)$ o meglio

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{g(t)}{t} \right\} (s) = -\int \hat{g}(s) ds + C = \hat{h}(s)$$

La costante complessa C va scelta in modo che $\hat{h}(s)$ soddisfi i teoremi del valore iniziale e finale. Ovviamente $\lim_{t \downarrow 0} g(t)/t$ deve esistere ed essere finito.



Teorema (Traformazione di funzioni periodiche)

Sia $f(t+T) = f(t)$ per $t > 0$ allora vale

$$\mathcal{L} \{f(t)\} (s) = \frac{\int_0^T f(t)e^{-st} dt}{1 - e^{-sT}}$$

Teorema (Traformazione del prodotto di convoluzione)

Sia $(f \star g)(t)$ definita come segue:

$$(f \star g)(t) = \int_0^t f(z)g(t-z) dz$$

allora vale

$$\mathcal{L} \{f \star g\} (s) = \hat{f}(s) \hat{g}(s)$$



Tabella delle trasformate

Funzione	Trasformata	Funzione	Trasformata
1	$\frac{1}{s}$	$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$
$e^{at} t^n$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$
$e^{\alpha t} - e^{\beta t}$	$\frac{\alpha - \beta}{(s-\alpha)(s-\beta)}$	$e^{at} \cosh \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 - \omega^2}$
$e^{at} f(t)$	$\widehat{f}(s - \alpha)$	$e^{at} \sinh \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2 - \omega^2}$
$f(t - \alpha)$	$e^{-\alpha s} \widehat{f}(s)$	$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \widehat{f}(s)$
$f(at)$	$\frac{1}{a} \widehat{f}\left(\frac{s}{a}\right)$	$\frac{d}{dt} f(t)$	$s \widehat{f}(s) - f(0^+)$
$\int_0^t f(z) dz$	$\frac{1}{s} \widehat{f}(s)$	$\frac{d^n}{dt^n} f(t)$	$s^n \widehat{f}(s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^{n-j-1} f^{(j)}(0^+)$

Attenzione, le funzioni a sinistra delle trasformate devono intendersi uguali a 0 per $t < 0$, cioè $f(t) \rightarrow \widehat{f}(s)$ in realtà è $u(t)f(t) \rightarrow \widehat{f}(s)$ dove $u(t)$ è la funzione di Heaviside.



Forma standard della trasformata di Laplace

(1/2)

- Nelle applicazioni elettriche o meccaniche la trasformata di Laplace si può normalmente scrivere nella forma:

$$G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_m s^m}{(s - p_1)^{m_1} (s - p_2)^{m_2} \dots (s - p_n)^{m_n}}$$

dove $p_i \neq p_j$ se $i \neq j$.

- Possiamo sempre assumere che $\partial P(s) < \partial Q(s)$ in caso contrario usando la divisione di polinomi con resto:

$$P(s) = Q(s)A(s) + B(s) \quad \partial B(s) < \partial Q(s)$$

e quindi

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = A(s) + \frac{B(s)}{Q(s)}$$



- La antitrasformata di un polinomio

$$A(s) = a_0 + a_1s + \cdots + a_ns^n$$

formalmente è la seguente

$$\mathcal{L} \{A(s)\}^{-1}(t) = a_0\delta(t) + a_1\delta^{(1)}(t) + \cdots + a_n\delta^{(n)}(t)$$

- Le **“funzioni”** $\delta^{(k)}(t)$ sono le derivate k -esime nel senso delle distribuzioni della delta di Dirac ed hanno la proprietà:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta^{(k)}(t) dt = (-1)^k f^{(k)}(0)$$

- A parte l'impulso unitario ($\delta(t)$) normalmente le derivate dell'impulso non si trovano nelle applicazioni considerate.
- Possiamo quindi considerare unicamente l'antitrasformata della funzione razionale $P(s)/Q(s)$ con $\partial P(s) < \partial Q(s)$.



Caso radici semplici

Data la funzione razionale nella variabile complessa s ;

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \cdots + b_ms^m}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} \quad (m < n)$$

dove $p_i \neq p_j$ se $i \neq j$. Possiamo riscrivere $G(s)$ come somma di fratti semplici

$$G(s) = \frac{\alpha_1}{s - p_1} + \frac{\alpha_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{s - p_n}$$

dove:

$$\alpha_i = \lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i)G(s)$$

infatti

$$(s - p_i)G(s) = \alpha_i + \sum_{j \neq i} \alpha_j \frac{s - p_i}{s - p_j}$$



Caso radici multiple

Nel caso di radici multiple ad esempio nel caso di una singola radice p di molteplicità n

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_ms^m}{(s-p)^n} \quad (m < n)$$

Possiamo ancora riscrivere $G(s)$ come somma di fratti semplici come segue

$$G(s) = \frac{\alpha_1}{s-p} + \frac{\alpha_2}{(s-p)^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{(s-p)^n}$$

dove ($0! = 1$):

$$\alpha_{n-k} = \frac{1}{k!} \lim_{s \rightarrow p} \frac{d^k}{ds^k} [(s-p)^n G(s)], \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

infatti

$$(s-p)^n G(s) = \alpha_1 (s-p)^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} (s-p) + \alpha_n$$



Caso generale

Nel caso generale

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_ms^m}{(s-p_1)^{m_1} (s-p_2)^{m_2} \dots (s-p_k)^{m_k}} \quad (m < m_1 + m_2 + \dots + m_k)$$

dove m_i è la molteplicità della radice p_i . Possiamo ancora riscrivere $G(s)$ come somma di fratti semplici come segue

$$G(s) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{m_j} \frac{\alpha_{jk}}{(s-p_j)^k}$$

dove ($0! = 1$):

$$\alpha_{j,m_j-k} = \frac{1}{k!} \lim_{s \rightarrow p} \frac{d^k}{ds^k} [(s-p_j)^{m_j} G(s)], \quad k = 0, 1, \dots, m_j - 1$$



Formula esplicita della soluzione

Avendo scritto $G(s)$ come somma di fratti semplici come segue

$$G(s) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{m_j} \frac{\alpha_{jk}}{(s - p_j)^k}$$

formalmente l'inversa diventa consultando la tabella delle trasformate:

$$G(t) = \mathcal{L} \{G(s)\}^{-1} (t) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{m_j} \frac{\alpha_{jk}}{(k-1)!} e^{p_j t} t^{k-1}$$

Il problema di questa espressione è che se p_j è un numero complesso il termine corrispondente è una funzione a valori complessi della quale non abbiamo definito la trasformata di Laplace.



Caso generale con radici complesse semplici

(1/3)

Per ovviare al problema dei numeri complessi basta **raccogliere** le radici complesse coniugate a due due in modo da avere a che fare solo con funzioni razionali semplici a coefficienti reali.

- Per semplificare l'esposizione consideriamo il caso di due sole radici complesse coniugate

$$G(s) = \frac{1}{2} \left[\frac{\alpha_1}{s - p} + \frac{\alpha_2}{s - \bar{p}} \right]$$

- Il fattore $\frac{1}{2}$ è stato messo per uniformare il caso di radice reale semplice con il caso di due radici complesse coniugate



Caso generale con radici complesse semplici

(2/3)

- Per prima osserviamo che $\alpha_1 = \bar{\alpha}_2$:

$$\alpha_2 = \lim_{s \rightarrow \bar{p}} (s - \bar{p})G(s) = \overline{\lim_{\bar{s} \rightarrow p} (\bar{s} - p)G(\bar{s})} = \overline{\lim_{s \rightarrow p} (s - p)G(s)} = \bar{\alpha}_1$$

- Quindi ponendo $\alpha = \alpha_1$, $G(s)$ si riscrive come

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1}{2} \frac{\alpha}{s - p} + \frac{1}{2} \frac{\bar{\alpha}}{s - \bar{p}} = \frac{1}{2} \frac{\alpha(s - \bar{p}) + \bar{\alpha}(s - p)}{(s - p)(s - \bar{p})} \\ &= \frac{1}{2} \frac{s(\alpha + \bar{\alpha}) - p\bar{\alpha} - \bar{p}\alpha}{s^2 - s(p + \bar{p}) + p\bar{p}} \\ &= \frac{s \operatorname{RE}(\alpha) - \operatorname{RE}(p\bar{\alpha})}{s^2 - 2s \operatorname{RE}(p) + |p|^2} \end{aligned}$$



Caso generale con radici complesse semplici

(3/3)

- Osserviamo inoltre che:

$$s^2 - 2s \operatorname{RE}(p) + |p|^2 = (s - \operatorname{RE}(p))^2 + \operatorname{IM}(p)^2$$

$$\operatorname{RE}(p\bar{\alpha}) = \operatorname{RE}(p) \operatorname{RE}(\alpha) + \operatorname{IM}(\alpha) \operatorname{IM}(p)$$

- inoltre ponendo $a = \operatorname{RE}(\alpha)$ e $b = -\operatorname{IM}(\alpha)$, $G(s)$ si può riscrivere come

$$G(s) = a \frac{s - \operatorname{RE}(p)}{(s - \operatorname{RE}(p))^2 + \operatorname{IM}(p)^2} + b \frac{\operatorname{IM}(p)}{(s - \operatorname{RE}(p))^2 + \operatorname{IM}(p)^2}$$

- e quindi l'antitrasformata diventa analizzando la tabella delle trasformate standard

$$G(t) = e^{\operatorname{RE}(p)t} (a \cos \operatorname{IM}(p)t + b \sin \operatorname{IM}(p)t)$$



CONCLUSIONI: Caso con radici complesse semplici

- Nel caso il denominatore di $G(s)$ contenga due radici semplici complesse coniugate p e \bar{p} , cioè

$$G(s) = \frac{P(s)}{(s - p)(s - \bar{p})}$$

- Allora $G(s)$ si può riscrivere come

$$G(s) = a \frac{s - \operatorname{RE}(p)}{(s - \operatorname{RE}(p))^2 + \operatorname{IM}(p)^2} + b \frac{\operatorname{IM}(p)}{(s - \operatorname{RE}(p))^2 + \operatorname{IM}(p)^2}$$

- e quindi l'antitrasformata diventa analizzando la tabella delle trasformate standard

$$G(t) = e^{\operatorname{RE}(p)t} (a \cos \operatorname{IM}(p)t + b \sin \operatorname{IM}(p)t)$$



Caso generale con radici complesse multiple

(1/4)

- Nel caso di radici complesse essendo il polinomio a coefficienti reali saranno a due accoppiate con la loro complessa coniugata.
- Per semplificare l'esposizione consideriamo il caso di due sole radici complesse coniugate di molteplicità m

$$G(s) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left[\frac{\alpha_i}{(s - p)^i} + \frac{\beta_i}{(s - \bar{p})^i} \right]$$



Caso generale con radici complesse multiple

(2/4)

- Per prima osserviamo che $\alpha_i = \overline{\beta_i}$:

$$\begin{aligned}\alpha_{m-i} &= \lim_{s \rightarrow \overline{p}} \frac{d^i}{ds^i} (s - \overline{p})^m G(s) \\ &= \overline{\lim_{\overline{s} \rightarrow p} \frac{d^i}{d\overline{s}^i} (\overline{s} - p)^m G(\overline{s})} \\ &= \overline{\lim_{s \rightarrow p} \frac{d^i}{ds^i} (s - p)^m G(s)} = \overline{\beta_{m-i}}\end{aligned}$$

- Quindi $G(s)$ si riscrive come

$$G(s) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left[\frac{\alpha_i}{(s-p)^i} + \frac{\overline{\alpha_i}}{(s-\overline{p})^i} \right]$$



Caso generale con radici complesse multiple

(3/4)

- Osserviamo ora che

$$\frac{1}{(s-p)^{k+1}} = \frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^k}{ds^k} \frac{1}{s-p}$$

- Quindi $G(s)$ si riscrive come

$$\begin{aligned}G(s) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left[\frac{\alpha_i}{(s-p)^i} + \frac{\overline{\alpha_i}}{(s-\overline{p})^i} \right] \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(-1)^i}{i!} \frac{d^i}{ds^i} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_{i+1}}{s-p} + \frac{\overline{\alpha_{i+1}}}{s-\overline{p}} \right) \right]\end{aligned}$$



Caso generale con radici complesse multiple

(4/4)

- Come nel caso della radice complessa coniugata “singola” possiamo scrivere

$$G(s) = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \frac{d^i}{ds^i} \left[a_i \frac{s - \operatorname{RE}(p)}{(s - \operatorname{RE}(p))^2 + \operatorname{IM}(p)^2} + b_i \frac{\operatorname{IM}(p)}{(\operatorname{RE}(p) - s)^2 + \operatorname{IM}(p)^2} \right]$$

- dove

$$a_i = \operatorname{RE}(\alpha_{i+1}), \quad b_i = -\operatorname{IM}(\alpha_{i+1}).$$

- Ricordando la regola $\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \hat{f}(s)$ possiamo scrivere l'antitrasformata come:

$$G(t) = \sum_{i=0}^{m-1} t^i e^{\operatorname{RE}(p)t} [a_i \cos \operatorname{IM}(p)t + b_i \sin \operatorname{IM}(p)t]$$



Caso generale: Conclusioni

(1/2)

- In generale se $G(s) = P(s)/Q(s)$ con $\partial P(s) \leq \partial Q(s)$ e $Q(s)$ che ha n radici distinte p_k di molteplicità m_k (le coppie di radici complesse coniugate si contano 1) scriverà come:

$$G(s) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{m_k} \frac{1}{2} \left[\frac{\alpha_{ki}}{(s - p_k)^i} + \frac{\bar{\alpha}_{ki}}{(s - \bar{p}_k)^i} \right]$$

- Usando le considerazioni dei lucidi precedenti e ponendo $r_k = \operatorname{RE}(p_k)$ e $\omega_k = \operatorname{IM}(p_k)$ otteniamo

$$G(s) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{m_k-1} (-1)^i \frac{d^i}{ds^i} \left[a_{ki} \frac{s - r_k}{(s - r_k)^2 + \omega_k^2} + b_{ki} \frac{\omega_k}{(r_k - s)^2 + \omega_k^2} \right]$$

dove $a_{ki} = \operatorname{RE}(\alpha_{ki+1})$ e $b_{ki} = -\operatorname{IM}(\alpha_{ki+1})$.



Caso generale: Conclusioni

(2/2)

- Applicando l'antitrasformata otteniamo

$$G(t) = \sum_{k=1}^n e^{r_k t} [A_k(t) \cos \omega_k t + B_k(t) \sin \omega_k t]$$

- dove

$$A_k(t) = \sum_{i=0}^{m_k-1} a_{ki} t^i, \quad B_k(t) = \sum_{i=0}^{m_k-1} b_{ki} t^i$$

- Notate che se $\text{IM}(p_k) = \omega_k = 0$ allora riotteniamo il caso delle radici multiple reali.

Calcolo pratico dei coefficienti α_{ki}

(1/2)

Dalle considerazioni precedenti data $G(s) = P(s)/Q(s)$, la sua espansione in fratti semplici prende la forma

$$G(s) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{m_k} \frac{1}{2} \left[\frac{\alpha_{ki}}{(s - p_k)^i} + \frac{\bar{\alpha}_{ki}}{(s - \bar{p}_k)^i} \right]$$

dove:

$$\alpha_{j, m_j - i} = \frac{1}{i!} \lim_{s \rightarrow p} \frac{d^i}{ds^i} [(s - p_j)^{m_j} G(s)], \quad i = 0, 1, \dots, m_j - 1$$

pur essendo questa espansione perfettamente lecita può essere onerosa da calcolare. Si possono fare meno conti facendo alcune considerazioni.



Calcolo pratico dei coefficienti α_{ki}

(2/2)

Moltiplicando l'espansione precedente per $Q(s)$ otteniamo una uguaglianza tra polinomi

$$P(s) = Q(s)G(s) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{m_k} \frac{Q(s)}{2} \left[\frac{\alpha_{ki}}{(s-p_k)^i} + \frac{\bar{\alpha}_{ki}}{(s-\bar{p}_k)^i} \right]$$

I coefficienti α_{km_k} si ottengono immediatamente dalla relazione

$$P(p_k) = Q(p_k)G(p_k)$$

gli altri coefficienti si ottengono tramite derivazione e usando i risultati precedenti

$$\alpha_{j,m_k-j} := \text{risolve per } \alpha_{j,m_k-j} \quad \frac{d^j}{ds^j} P(s) \Big|_{s=p_k} = 0$$

per capire come funziona conviene fare un semplice esempio



Esempio Pratico molto complesso

(1/11)

Vogliamo trovare l'espansione in fratti semplici del seguente polinomio razionale

$$\frac{s^2 + s + 1}{(s-1)(s-3)^3(s-(1+i))^2(s-(1-i))^2}$$

le radici sono ovviamente $p_1 = 1$, $p_2 = 3$, $p_3 = 1 + i$ con molteplicità $m_1 = 1$, $m_2 = 3$ ed $m_3 = 2$. L'espansione in fratti semplici prende la forma (i fattori 1/2 li metto sono alla fine)

$$\begin{aligned} G(s) = & \frac{a}{s-1} + \frac{b_1}{s-3} + \frac{b_2}{(s-3)^2} + \frac{b_3}{(s-3)^3} \\ & + \frac{c_1 + id_1}{s-(1+i)} + \frac{c_1 - id_1}{s-(1-i)} \\ & + \frac{c_2 + id_2}{(s-(1+i))^2} + \frac{c_2 - id_2}{(s-(1-i))^2} \end{aligned}$$



Esempio Pratico molto complesso

(2/11)

Calcoliamo ora

$$\begin{aligned}
 P(s)G(s) = & a(s-3)^3(s-(1+i))^2(s-(1-i))^2 \\
 & + b_1(s-1)(s-3)^2(s-(1+i))^2(s-(1-i))^2 \\
 & + b_2(s-1)(s-3)(s-(1+i))^2(s-(1-i))^2 \\
 & + b_3(s-1)(s-(1+i))^2(s-(1-i))^2 \\
 & + (c_1 + id_1)(s-1)(s-3)^3(s-(1+i))(s-(1-i))^2 \\
 & + (c_1 - id_1)(s-1)(s-3)^3(s-(1+i))^2(s-(1-i)) \\
 & + (c_2 + id_2)(s-1)(s-3)^3(s-(1-i))^2 \\
 & + (c_2 - id_2)(s-1)(s-3)^3(s-(1+i))^2
 \end{aligned}$$



Esempio Pratico molto complesso

(3/11)

Espandendo i polinomi

$$\begin{aligned}
 Q(s)G(s) = & (a + b_1 + 2c_1)s^7 \\
 & + (2c_2 - 11b_1 + b_2 - 13a - 26c_1 - 2d_1)s^6 \\
 & + (-24c_2 - 8b_2 + b_3 - 4d_2 + 51b_1 + 71a + 24d_1 + 140c_1)s^5 \\
 & + (-116d_1 - 215a - 133b_1 - 408c_1 + 27b_2 - 5b_3 + 44d_2 + 112c_2)s^4 \\
 & + (12b_3 + 706c_1 + 400a - 52b_2 + 292d_1 + 216b_1 - 184d_2 - 252c_2)s^3 \\
 & + (60b_2 - 738c_1 - 16b_3 - 468a + 270c_2 - 220b_1 - 414d_1 + 360d_2)s^2 \\
 & + (324a + 12b_3 + 132b_1 - 108c_2 - 40b_2 + 432c_1 - 324d_2 + 324d_1)s \\
 & - 108a - 36b_1 + 12b_2 - 4b_3 - 108c_1 - 108d_1 + 108d_2
 \end{aligned}$$

Notate che è un polinomio a coefficienti reali in s .



Esempio Pratico molto complesso

(4/11)

Calcoliamo ora i polinomi in $s = 1$ (la prima radice)

$$Q(1)G(1) = -8a, \quad P(1) = 3, \quad a = -\frac{3}{8}$$

Calcoliamo ora i polinomi in $s = 3$ (la seconda radice)

$$Q(3)G(3) = 50b_3, \quad P(3) = 13, \quad b_3 = \frac{13}{50}$$

Calcoliamo ora i polinomi in $s = 1 + i$ (la terza radice)

$$Q(1+i)G(1+i) = 44c_2 - 8d_2 + i(8c_2 + 44d_2), \quad P(1+i) = 2 + 3i,$$

da cui otteniamo il sistema

$$44c_2 - 8d_2 = 2, \quad 8c_2 + 44d_2 = 3.$$

che risolto da come risultato $c_2 = 7/125$ e $d_2 = 29/500$.



Esempio Pratico molto complesso

(5/11)

Calcoliamo ora

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(Q(s)G(s)) &= 7(a + b_1 + 2c_1)s^6 \\ &+ 6(2c_2 - 11b_1 + b_2 - 13a - 26c_1 - 2d_1)s^5 \\ &+ 5(-24c_2 - 8b_2 + b_3 - 4d_2 + 51b_1 + 71a + 24d_1 + 140c_1)s^4 \\ &+ 4(-116d_1 - 215a - 133b_1 - 408c_1 + 27b_2 - 5b_3 + 44d_2 + 112c_2)s^3 \\ &+ 3(12b_3 + 706c_1 + 400a - 52b_2 + 292d_1 + 216b_1 - 184d_2 - 252c_2)s^2 \\ &+ 2(60b_2 - 738c_1 - 16b_3 - 468a + 270c_2 - 220b_1 - 414d_1 + 360d_2)s \\ &+ 324a + 12b_3 + 132b_1 - 108c_2 - 40b_2 + 432c_1 - 324d_2 + 324d_1 \end{aligned}$$



Esempio Pratico molto complesso

(6/11)

Calcoliamo ora i polinomi in $s = 3$ (la seconda radice)

$$\frac{d}{ds} Q(s)G(s)|_{s=3} = 50b_2 + 105b_3, \quad P'(3) = 7,$$

usando il valore precedentemente calcolato $b_3 = -\frac{13}{50}$ otteniamo $b_2 = -203/500$. Calcoliamo ora i polinomi in $s = 1 + i$ (la terza radice)

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} Q(s)G(s)|_{s=1+i} &= 44c_1 - 8d_1 - 32c_2 + 124d_2 \\ &\quad + 8ic_1 + 44id_1 - 32id_2 - 124ic_2 \end{aligned}$$

$$\frac{d}{ds} P(s)|_{s=1+i} = 3 + 2i$$

mettendo a sistema e usando i valori di c_2 e d_2 otteniamo $c_1 = -6/625$ e $d_1 = 309/1250$.



Esempio Pratico molto complesso

(7/11)

Calcoliamo ora

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2} (Q(s)G(s)) &= (42a + 42b_1 + 84c_1) s^5 \\ &\quad + (60c_2 - 330b_1 + 30b_2 - 390a - 780c_1 - 60d_1) s^4 \\ &\quad + (1420a - 480c_2 + 1020b_1 + 480d_1 + 2800c_1 + 20b_3 - 160b_2 - 80d_2) s^3 \\ &\quad + (-4896c_1 + 1344c_2 + 528d_2 - 2580a - 60b_3 - 1596b_1 - 1392d_1 + 324b_2) s^2 \\ &\quad + (72b_3 - 1512c_2 + 4236c_1 + 2400a + 1296b_1 - 312b_2 + 1752d_1 - 1104d_2) s \\ &\quad - 936a + 540c_2 - 440b_1 + 720d_2 - 32b_3 - 828d_1 - 1476c_1 + 120b_2 \end{aligned}$$



Esempio Pratico molto complesso

(8/11)

Calcoliamo ora i polinomi in $s = 3$ (la seconda radice)

$$\frac{d^2}{ds^2} Q(s)G(s)|_{s=3} = 100b_1 + 210b_2 + 184b_3, \quad P''(3) = 2,$$

usando il valore precedentemente calcolato $b_3 = -\frac{13}{50}$ e $b_2 = -203/500$ otteniamo $b_1 = 1971/5000$.



Esempio Pratico molto complesso

(9/11)

Mettendo tutto assieme otteniamo

$$\begin{aligned} G(s) = & \frac{-3/8}{s-1} + \frac{1971}{5000(s-3)} + \frac{-203}{500(s-3)^2} + \frac{13}{50(s-3)^3} \\ & + \frac{-6/625 + 309/1250i}{s-(1+i)} + \frac{-6/625 - 309/1250i}{s-(1-i)} \\ & + \frac{7/125 + 29/500i}{(s-(1+i))^2} + \frac{7/125 - 29/500i}{(s-(1-i))^2} \end{aligned}$$



Esempio Pratico molto complesso

(10/11)

E usando le relazioni sulle radici complesse coniugate

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{-3/8}{s-1} + \frac{1971}{5000(s-3)} + \frac{-203}{500(s-3)^2} + \frac{13}{50(s-3)^3} \\
 &+ 2 \left[\frac{-6}{625} \frac{s-1}{(s-1)^2+1} + \frac{309}{1250} \frac{1}{(s-1)^2+1} \right] \\
 &- 2 \frac{d}{ds} \left[\frac{7}{125} \frac{s-1}{(s-1)^2+1} + \frac{29}{500} \frac{1}{(s-1)^2+1} \right]
 \end{aligned}$$



Esempio Pratico molto complesso

(11/11)

usando la tabella della trasformata di Laplace

$$\begin{aligned}
 G(t) &= \frac{-3}{8} e^t + e^{3t} \left(\frac{1971}{5000} + \frac{-203}{500} t + \frac{13}{100} t^2 \right) \\
 &+ e^t \left[\frac{-12}{625} \cos t + \frac{618}{1250} \sin t \right] + e^{3t} \left[\frac{14}{125} \cos t + \frac{58}{500} \sin t \right] \\
 &= e^t \left[\frac{-3}{8} + \left(\frac{-12}{625} + t \frac{14}{125} \right) \cos t + \left(\frac{618}{1250} + t \frac{58}{500} \right) \sin t \right] \\
 &+ e^{3t} \left(\frac{1971}{5000} + \frac{-203}{500} t + \frac{13}{100} t^2 \right)
 \end{aligned}$$

