I Numeri Complessi*

Operazioni di somma e prodotto su $\mathbb{R}^2$

Consideriamo $\mathbb{R}^2$, insieme delle coppie ordinate di numeri reali,

$$\mathbb{R}^2 = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\},$$

per cui si ha

$$(a,b) = (c,d) \quad \Longleftrightarrow \quad a = c \quad \text{e} \quad b = d.$$

Introduciamo in tale insieme una operazione di *somma*

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d) \qquad \forall\,(a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2 \tag{1}$$

ed una operazione di *prodotto*

$$(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, ad + bc) \qquad \forall\,(a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2, \tag{2}$$

dove le operazioni di somma e di prodotto che compaiono nei secondi membri della (1) e della (2) sono le usuali operazioni definite sul campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

Esempio.

$$\begin{aligned}(1,2) + (-2,3) &= (-1,5),\\ (2,3)\cdot(1,-4) &= (2+12,-8+3) = (14,-5).\end{aligned}$$

Proprietà della somma

Si verifica facilmente che, per l'operazione di somma in $\mathbb{R}^2$ definita dalla (1), valgono le seguenti proprietà: per ogni $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{R}^2$

1. *Proprietà associativa*

$$[(a,b)+(c,d)]+(e,f) = (a,b)+[(c,d)+(e,f)]\,.$$

*Questi appunti sono stati scritti originariamente e principalmente da Silvia Falletta e Marco Verani, e rivisitati in seguito da Gianmarco Manzini ed Enrico Bertolazzi.

2. *Proprietà commutativa*

$$(a,b)+(c,d)=(c,d)+(a,b).$$

3. *Esistenza dell'elemento neutro*

$$\exists\ \mathbf{0}\in\mathbb{R}^2 \mid (a,b)+\mathbf{0}=\mathbf{0}+(a,b)=(a,b);$$

   tale elemento è costituito dallo zero di $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{0}=(0,0)$.

4. *Esistenza dell'elemento opposto*

$$\exists\ -(a,b)\ \in\mathbb{R} \mid (a,b)+[-(a,b)]=[-(a,b)]+(a,b)=\mathbf{0}.$$

   È facile verificare che tale opposto è costituito dalla coppia $(-a,-b)$.

Proprietà del prodotto

L'operazione di prodotto in $\mathbb{R}^2$, definita dalla (2), soddisfa le seguenti proprietà: per ogni (a,b), (c,d), $(e,f)\in\mathbb{R}^2$

1. *Proprietà associativa*

$$[(a,b)\cdot(c,d)]\cdot(e,f)=(a,b)\cdot[(c,d)\cdot(e,f)]\,.$$

2. *Proprietà commutativa*

$$(a,b)\cdot(c,d)=(c,d)\cdot(a,b).$$

3. *Esistenza dell'elemento neutro*

$$\exists\ \mathbf{1}\in\mathbb{R}^2 \mid (a,b)\cdot\mathbf{1}=\mathbf{1}\cdot(a,b)=(a,b);$$

   tale elemento è costituito dalla coppia $\mathbf{1}=(1,0)$;

4. *Proprietà distributiva rispetto alla somma*

$$[(a,b)+(c,d)]\cdot(e,f)=(a,b)\cdot(e,f)+(c,d)\cdot(e,f).$$

Dimostrazione. Dimostriamo, a titolo di esempio, la proprietà commutativa del prodotto, lasciando per esercizio la verifica delle altre: utilizzando la definizione di prodotto data dalla (2) si ottiene che

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc);$$

d'altra parte si ha

$$(c, d) \cdot (a, b) = (ca - db, cb + da).$$

La tesi segue banalmente sfruttando la proprietà commutativa della somma e del prodotto in $\mathbb{R}$. ■

Il campo dei numeri complessi

Poichè l'insieme

$$\mathbb{R}' = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

è contenuto in $\mathbb{R}^2$, anzi è facilmente identificabile (mediante una corrispondenza biunivoca) con $\mathbb{R}$, è sensato, anzi utile, scrivere a al posto di $(a, 0)$ per ogni coppia di $\mathbb{R}'$. Definendo inoltre l'*unità immaginaria* i

$$\imath \equiv (0, 1),$$

possiamo usare la seguente notazione per scrivere ogni coppia (a, b) di $\mathbb{R}^2$ nella forma

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + (0, b) \cdot (1, 0) = a + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + \imath b.$$

Osserviamo inoltre che, con le notazioni appena adottate, i soddisfa la condizione

$$\imath^2 = -1.$$

Possiamo ora dare la definizione di insieme dei numeri complessi:

Definizione. L'insieme dei numeri complessi, denotato con $\mathbb{C}$, è costituito dalle coppie di numeri reali in cui sono state introdotte le due operazioni di somma e di prodotto definite in (1) e (2):

$$\mathbb{C} = \left(\mathbb{R}^2, +, \cdot\right).$$

La notazione abitualmente usata per indicare un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ è:

$$z = a + \imath\, b, \qquad \text{con} \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

dove

$$a = Re\{z\} \text{ si chiama parte reale di } z,$$

$$b = Im\{z\} \text{ si chiama parte immaginaria di } z.$$

Osserviamo che $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ in quanto ogni numero reale a può essere scritto nella forma $a = a + \imath \cdot 0$, e che il prodotto di due numeri complessi, scritti nella forma $z_1 = a + \imath\, b$ e $z_2 = c + \imath\, d$, segue le normali regole di moltiplicazione polinomiale: infatti il prodotto $z_1 \cdot z_2$ può essere svolto sia in forma algebrica

$$(a + \imath\, b) \cdot (c + \imath\, d) = ac + \imath\, ad + \imath\, bc + \imath^{\,2} bd = ac - bd + \imath\,(ad + bc),$$

sia sfruttando la definizione di prodotto in $\mathbb{R}$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc),$$

e osservando che, con la notazione adottata, i due risultati coincidono. Le proprietà di cui godono le operazioni di somma e prodotto introdotte in $\mathbb{C}$ (vedi paragrafo) mostrano che $\mathbb{C}$ è un anello commutativo dotato di identità moltiplicativa. Ci proponiamo di mostrare che $\mathbb{C}$ è anche un campo, ossia che ogni numero complesso diverso dall' elemento nullo ammette inverso moltiplicativo. A tale scopo introduciamo le nozioni di *coniugato* e di *modulo* di un numero complesso.

Definizione. Sia $z = a + \imath\, b$. Definiamo *coniugato* di z il numero complesso

$$\overline{z} = a - \imath\, b.$$

Esempio. Alcuni esempi dell'operazione di coniugio:

$$z = 1 + \imath\,, \qquad \overline{z} = 1 - \imath\,;$$

$$z = 3\imath\,, \qquad \overline{z} = -3\imath\,;$$

$$z = a, \qquad \overline{z} = a \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Proprietà dell'operazione di coniugio

Sia $z = a + \imath\, b \in \mathbb{C}$. Valgono le seguenti relazioni:

(i) $\quad z + \overline{z} = 2a \quad$ da cui segue $\quad Re\,\{z\} = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$

(ii) $\quad z - \overline{z} = 2\imath\, b \quad$ da cui segue $\quad Im\,\{z\} = \dfrac{z - \overline{z}}{2\imath}$

(iii) $\quad \overline{(\overline{z})} = z$

(iv) $\quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

(v) $\quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

(vi) $\quad z = \overline{z} \quad \Longleftrightarrow \quad z \in \mathbb{R}$

(vii) $\quad z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2 \quad$ è un numero reale non negativo.

Dimostrazione. Dimostriamo le proprietà (v) e (vii), lasciando per esercizio la verifica delle rimanenti. Ponendo $z_1 = a + \imath\, b$ e $z_2 = c + \imath\, d$ si ottiene

$$\begin{aligned} \overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{(a + \imath\, b) \cdot (c + \imath\, d)} = \\ &= \overline{ac + ad\imath + bc\imath - bd} = \\ &= ac - bd - (ad + bc)\imath \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} &= (a - \imath\, b) \cdot (c - \imath\, d) \\ &= ac - ad\imath - bc\imath - bd \\ &= ac - bd - (ad + bc)\imath\,. \end{aligned}$$

Se $z = a + \imath\, b$, ne segue che

$$z \cdot \overline{z} = (a + \imath\, b)(a - \imath\, b) = a^2 + b^2 \geq 0 \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Per la proprietà (vii), ha senso dare la seguente definizione:

Definizione. Definiamo *modulo* di z il numero

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}.$$

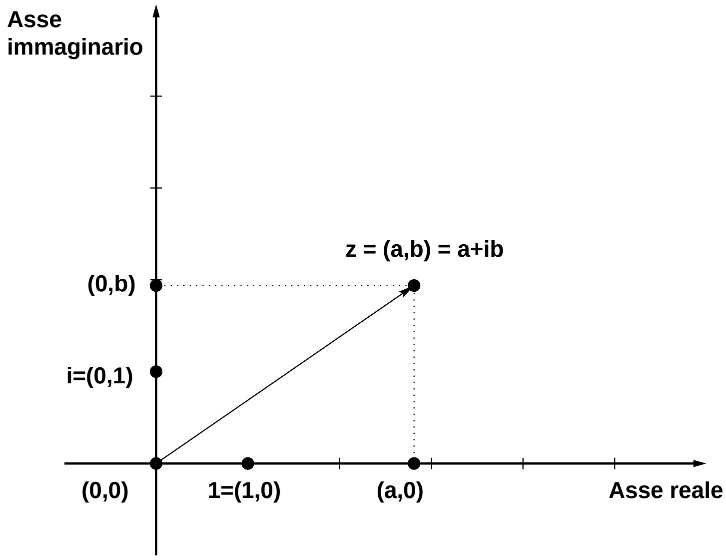

Figura 1: Forma algebrica nel piano complesso

Proprietà del modulo

Sia $z = a + \imath\, b \in \mathbb{C}$. Valgono le seguenti relazioni:

(i) $|z| = |\overline{z}|$

(ii) $|z|$ è un numero reale non negativo e

$$|z| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a^2 + b^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z = 0.$$

(iii) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1|\, |z_2|$

(iv) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ nota come disuguaglianza triangolare.

Diamo qui di seguito l'interpretazione geometrica della disuguaglianza triangolare. Essendo i numeri complessi identificabili con coppie di numeri reali, è naturale rappresentarli graficamente come punti del piano cartesiano. Quindi, facendo riferimento alla figura 1, il numero $z = a + \imath\, b$ verrà rappresentato dal punto di coordinate (a, b). In particolare l'origine $(0, 0)$ rappresenta il numero complesso 0, il punto $(1, 0)$ rappresenta il numero complesso $1 = 1 + 0i$ e il punto $(0, 1)$ rappresenta il numero complesso $i = 0 + 1\imath$.

I punti dell'asse x del piano complesso corrispondono ai numeri reali $((x, 0) \equiv x + 0\imath\,)$, per cui l'asse x è chiamato **asse reale**. I punti dell'asse y corrispondono ai numeri immaginari puri $((0, y) \equiv 0 + y\imath\,)$, per cui l'asse y è chiamato **asse immaginario**. Geometricamente la disuguaglianza triangolare

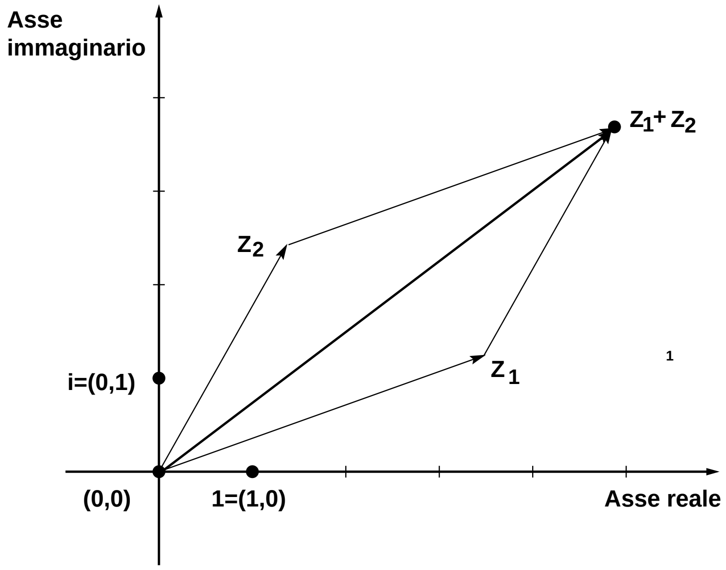

Figura 2: Somma di numeri complessi

esprime la proprietà che in un triangolo ogni lato è minore o uguale della somma degli altri due (vedi figura 2).

Dalla proprietà (ii) del modulo segue che per ogni numero complesso $z \neq 0$ ha senso considerare il numero $1/\,|z|$, ed è facile verificare che l'inverso di z è dato da

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Esempio (Calcolo dell'inverso di un numero complesso). .

$$\begin{aligned}
&z = 3 - 2\imath\,, \qquad && |z|^2 = 13, \qquad && z^{-1} = \frac{3 + 2\imath}{13}, \\
&z = \imath\,, && |z|^2 = 1, && z^{-1} = -\imath\,, \\
&z = a, && |z|^2 = a^2, && z^{-1} = \frac{1}{a} \qquad \forall a \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Con riferimento all'ultimo esempio, osserviamo che l'inverso di un numero reale, pensato come elemento di $\mathbb{C}$, coincide con quello abitualmente calcolato in $\mathbb{R}$. La definizione di inverso in $\mathbb{C}$ è quindi una naturale estensione di quella esistente in $\mathbb{R}$.

Problema. Ci proponiamo ora di risolvere due problemi del tipo

1. calcolare $(1 + \imath\,)^{2000}$;

2. trovare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^n = w \qquad n \geq 1$$

con $w \in \mathbb{C}$ numero complesso fissato.

A tale scopo è utile introdurre la *rappresentazione trigonometrica* di un numero complesso.

Forma polare dei numeri complessi

Sia z un numero complesso scritto nella forma algebrica $z = a + \imath\, b$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Indichiamo con ρ il modulo di z e con θ l'angolo che il segmento individuato dall'origine e dal punto di coordinate (a, b) forma con l'asse x. ρ e θ prendono il nome di *coordinate polari*:

$$\begin{aligned} \rho &= |z| && \text{modulo di } z, \\ \theta &= arg\,(z) && \text{argomento di } z. \end{aligned}$$

Dalle note proprietà sui triangoli rettangoli si ricava che

$$\begin{aligned} a &= \rho \cos\theta \\ b &= \rho \sin\theta \end{aligned}$$

o analogamente

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{a^2 + b^2}, \\ \theta &= \arctan(b/a), \end{aligned}$$

da cui segue la *rappresentazione polare* di z:

$$\begin{aligned} z &= a + \imath\, b, \\ &= \rho\cos\theta + \imath\,\rho\sin\theta, \\ &= \rho\,(\cos\theta + \imath\,\sin\theta)\,, \end{aligned}$$

visualizzata in figura 3.

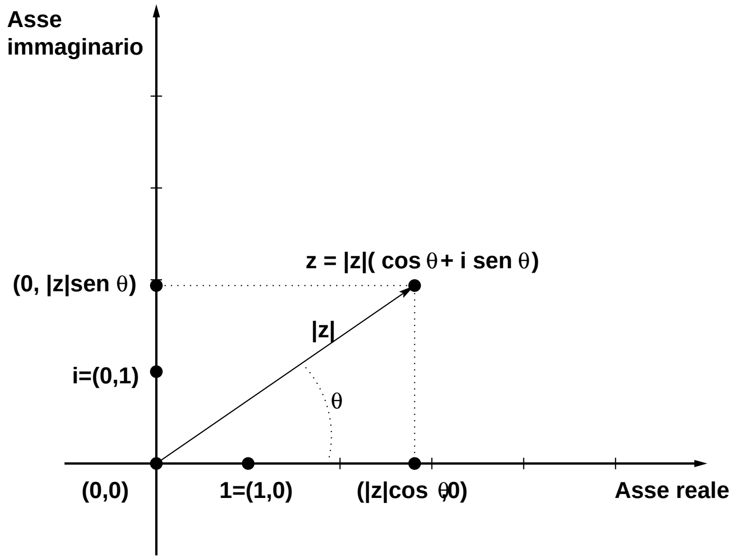

Figura 3: Forma polare di un numero complesso

Osservazione. Osserviamo che l'argomento di z è definito a meno di multipli interi di 2π, ossia variando l'angolo θ di 2π non varia l'argomento di z. Tenendo costante ρ ed aumentando θ di 2π si individua sempre lo stesso numero complesso, in quanto viene completato un giro sulla circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio ρ tornando al punto di partenza. D'altra parte, per la 2π-periodicità delle funzioni $\sin\theta$ e $\cos\theta$, si ha che

$$z = \rho\,(\cos\theta + \imath\,\sin\theta) = \rho\,(\cos(\theta+2\pi) + \imath\,\sin(\theta+2\pi))\,.$$

Osservazione. Facendo formalmente le serie di Taylor di $e^{\imath\,\theta}$ di $\cos\theta$ e $\sin\theta$ otteniamo:

$$\begin{aligned}
e^{\imath\,\theta} &= 1 + \imath\,\theta + \frac{(\imath\,\theta)^2}{2!} + \frac{(\imath\,\theta)^3}{3!} + \frac{(\imath\,\theta)^4}{4!} + \frac{(\imath\,\theta)^5}{5!} + \cdots + \frac{(\imath\,\theta)^{2k}}{(2k)!} + \frac{(\imath\,\theta)^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots \\
&= 1 + \imath\,\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \imath\,\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \imath\,\frac{\theta^5}{5!} + \cdots + (-1)^k\frac{\theta^{2k}}{(2k)!} + \imath\,(-1)^k\frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots \\
&= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} + \cdots + (-1)^k\frac{\theta^{2k}}{(2k)!} + \cdots\right) \\
&\quad + \imath\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \cdots + (-1)^k\frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots\right) \\
&= \cos\theta + \imath\,\sin\theta
\end{aligned}$$

quindi il numero complesso $\rho\,(\cos\theta + \imath\,\sin\theta)$ si può scrivere come:

$$\rho\,(\cos\theta + \imath\,\sin\theta) = \rho e^{\imath\,\theta}$$

Esercizio. Dato $z = 1 - \imath$, determinare i valori del suo modulo e del suo argomento.

$$a = 1 \quad \text{e} \quad b = -1 \qquad \Rightarrow \qquad \rho = \sqrt{2} \quad \text{e} \quad \theta = \arctan(-1) = \frac{7}{4}\pi.$$

La forma polare di z è quindi

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) + \imath\,\sin\left(\frac{7}{4}\pi\right)\right).$$

Esercizio. Dato $z = -2(\cos\alpha + \imath\,(-\sin\alpha))$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, determinare i valori del suo modulo e del suo argomento.

$$a = -2\cos\alpha, \quad \text{e} \quad b = 2\sin\alpha \qquad \Rightarrow \qquad \rho = 2 \quad \text{e} \quad \theta = \pi - \alpha.$$

Infatti,

$$\begin{aligned}
\theta &= \arctan\left(-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right), \\
&= \arctan(-\tan\alpha), \\
&= \arctan(\tan(\pi - \alpha)), \\
&= \pi - \alpha.
\end{aligned}$$

La forma polare di z è quindi

$$z = 2\left(\cos(\pi - \alpha) + \imath\,\sin(\pi - \alpha)\right).$$

Prodotto di numeri complessi in forma polare

Per il prodotto di numeri complessi in forma polare vale la seguente proposizione, che faciliterà il calcolo dele potenze.

Proposizione. *Il modulo del prodotto di due numeri complessi è uguale al prodotto dei moduli dei due numeri complessi, mentre l'argomento del prodotto di due numeri complessi è uguale alla somma dei loro argomenti.*

Siano quindi $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Si può scrivere

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1|\,|z_2|$$

$$arg\,(z_1 \cdot z_2) = arg\,(z_1) + arg\,(z_2)\,.$$

Dimostrazione. Riportiamo la dimostrazione, ma il lettore volenteroso dovrebbe cimentarsi da solo. Scrivendo i due numeri complessi nella loro forma trigonometrica

$$z_1 = \rho\,(\cos\theta + \imath\,\sin\theta)\,, \qquad z_2 = \sigma\,(\cos\alpha + \imath\,\sin\alpha)\,,$$

si ottiene

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \rho\sigma\,(\cos\theta + \imath\,\sin\theta)\,(\cos\alpha + \imath\,\sin\alpha)\,, \\ &= \rho\sigma\,[\cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha + \imath\,(\cos\alpha\sin\theta + \sin\alpha\cos\theta)]\,, \\ &= \rho\sigma\,[\cos(\theta+\alpha) + \imath\,\sin(\theta+\alpha)]\,. \end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato le proprietà delle funzioni trigonometriche che permettono di esplicitare il seno e il coseno della somma di due angoli in funzione dei valori del seno e coseno dei singoli angoli. ■

Osservazione. Assumendo valide le proprietà della funzione esponenziale per il prodotto anche nel campo complesso ottemiamo la proposizione in maniera più semplice:

$$z_1 = \rho e^{\imath\,\theta}, \qquad z_2 = \sigma e^{\imath\,\alpha},$$

si ottiene

$$z_1 \cdot z_2 = \rho e^{\imath\,\theta}\sigma e^{\imath\,\alpha} = \rho\sigma e^{\imath\,(\theta+\alpha)}$$

La proposizione preceddente può essere utilizzata anche nel calcolo del rapporto di due numeri complessi, come mostra il seguente corollario.

Corollario. *Sia* $w = \frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{C}$. *Allora*

$$\begin{aligned} |w| &= \frac{|z_1|}{|z_2|} \\ arg\,(w) &= arg\,(z_1) - arg\,(z_2) \end{aligned}$$

Dimostrazione. Possiamo scrivere w come prodotto di due numeri complessi

$$w = z_1 \cdot z_2^{-1} = z_1 \cdot \frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2},$$

e applicare i risultati di proposizione 1, ottenendo così

$$\begin{aligned}|w| &= |z_1| \cdot \left| \frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2} \right| = |z_1| \cdot \frac{|\overline{z_2}|}{|z_2|^2} = |z_1| \cdot \frac{|z_2|}{|z_2|^2}, \\ &= \frac{|z_1|}{|z_2|},\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}arg\,(w) &= arg\,(z_1) + arg\left(\frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2} \right), \\ &= arg\,(z_1) + arg\,(\overline{z_2})\,, \\ &= arg\,(z_1) - arg\,(z_2)\,.\end{aligned}$$

Negli ultimi passaggi abbiamo tenuto conto del fatto che l'argomento di un numero complesso non varia se tale numero complesso viene moltiplicato per un qualsiasi numero reale, cioè

$$arg\,(kz) = arg\,(z) \qquad \forall z \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

e del fatto che

$$arg\,(\overline{z}) = -\,arg\,(z) \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Tali verifiche sono lasciate per esercizio. ■

Formula di de Moivre

Proposizione. *Sia $\theta \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Allora vale*

$$(\cos\theta + \imath\,\sin\theta)^n = \cos\,(n\theta) + \imath\,\sin\,(n\theta)$$

Dimostrazione. Sia $z = \cos\theta + \imath\,\sin\theta$. Allora $|z| = 1$, ed inoltre dalle regole di moltiplicazione in forma polare si ha

$$z^2 = z \cdot z = \cos\,(2\theta) + \imath\,\sin\,(2\theta),$$

e

$$\begin{aligned} z^n &= z^{n-1} z, \\ &= (\cos((n-1)\theta) + \imath \sin((n-1)\theta)) (\cos\theta + \imath \sin\theta), \\ &= (\cos(n\theta) + \imath \sin(n\theta)). \end{aligned}$$

Per induzione si ha immediatamente il risultato. ■

Osservazione. Assumendo valide le proprietà della funzione esponenziale per l'elevamento a potenza anche nel campo complesso ottemiamo la proposizione in maniera più semplice:

$$z^n = (e^{\imath \theta})^n = e^{\imath n\theta}$$

A questo punto siamo in grado di calcolare $(1 + \imath)^{2000}$: basterà scrivere il numero complesso nella sua forma trigonometrica e applicare iterativamente le regole del prodotto in forma polare.

$$\begin{aligned} (1+\imath) &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \imath \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ (1+\imath)^{2000} &= \left(\sqrt{2}\right)^{2000}\left(\cos\left(2000\frac{\pi}{4}\right) + \imath \sin\left(2000\frac{\pi}{4}\right)\right), \\ &= \left(\sqrt{2}\right)^{2000}\left(\cos(250 \cdot 2\pi) + \imath \sin(250 \cdot 2\pi)\right), \\ &= 2^{1000}(\cos 0 + \imath \sin 0), \\ &= 2^{1000}. \end{aligned}$$

Esercizio. Dato $z \in \mathbb{C}$ tale che $|z| = 1$, trovare sul piano cartesiano i numeri complessi $-z$, $\overline{z}$, $1/z$, $\imath z$, $z + \imath z$.

Risoluzione. Osserviamo che z appartiene alla circonferenza unitaria. Allora le sue espessioni, algebrica e trigonometrica, sono date da

$$\begin{aligned} z &= \cos\theta + \imath \sin\theta, \\ z &= a + \imath b, \qquad \text{con} \qquad \sqrt{a^2+b^2} = 1 \end{aligned}$$

da cui si ricava

$$-z = -a - \imath\, b,$$

$$\overline{z} = a - \imath\, b,$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \overline{z}.$$

Il numero $\imath\, z$ è il prodotto dei due numeri complessi $\imath$ e z; pertanto, utilizzando le regole del prodotto in forma polare, ricaviamo che:

$$|\imath\, z| = |i|\ |z| = 1,$$

$$arg\,(\imath\, z) = arg\,(i) + arg\,(z) = \frac{\pi}{2} + \theta.$$

Quindi $\imath\, z$ appartiene alla circonferenza unitaria e il suo argomento è pari all'argomento di z aumentato di un angolo retto.

Analogamente, $z + \imath\, z = z(1 + \imath\,)$ è tale che

$$|z + \imath\, z| = |z|\ |1 + i| = |z|\,\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$arg\,(z + \imath\, z) = arg\,(z) + arg\,(1 + \imath\,) = \theta + \frac{\pi}{4}$$

Quindi $z + \imath\, z$ appartiene alla circonferenza di raggio $\sqrt{2}$ e il suo argomento è pari all'argomento di z aumentato di un angolo di $\frac{\pi}{4}$.

Esercizio. Trovare i valori dei numeri complessi z che risolvono l'equazione

$$z^n = w,$$

dove w è un numero complesso assegnato.

Risoluzione. Siano

$$z = \rho\,(\cos\theta + \imath\,\sin\theta)\,,$$

$$w = \sigma\,(\cos\alpha + \imath\,\sin\alpha)\,,$$

dove ρ e θ sono valori incogniti da determinare, mentre σ e α sono valori assegnati. Imponendo la condizione $z^n = w$, si ottiene

$$\rho^n\,(\cos(n\theta) + \imath\,\sin(n\theta)) = \sigma\,(\cos\alpha + \imath\,\sin\alpha)\,,$$

da cui, per confronto, si ricava

$$\rho = \sqrt[n]{\sigma},$$
$$\theta_k = \frac{\alpha + 2k\pi}{n}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Osservazione. Tutte le soluzioni dell'equazione hanno lo stesso modulo. Osservando infine l'espressione di θ, solo il lettore distratto potrebbe concludere che le soluzioni siano infinite. I distinti valori dell'angolo θ si ottengono per $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Si ottengono cioè n soluzioni distinte dell'equazione $z^n = w$ in corrispondenza degli n valori del parametro k:

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt[n]{\sigma}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{n}\right) + \imath\, \sin\left(\frac{\alpha}{n}\right)\right)\\
z_1 &= \sqrt[n]{\sigma}\left(\cos\left(\frac{\alpha+2\pi}{n}\right) + \imath\, \sin\left(\frac{\alpha+2\pi}{n}\right)\right)\\
z_2 &= \sqrt[n]{\sigma}\left(\cos\left(\frac{\alpha+4\pi}{n}\right) + \imath\, \sin\left(\frac{\alpha+4\pi}{n}\right)\right)\\
&\vdots\\
z^{n-1} &= \sqrt[n]{\sigma}\left(\cos\left(\frac{\alpha+2(n-1)\pi}{n}\right) + \imath\, \sin\left(\frac{\alpha+2(n-1)\pi}{n}\right)\right)
\end{aligned}$$

Tali soluzioni prendono il nome di *radici n-sime* di w.

Esercizio. Trovare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione $z^3 = 1$.

Risoluzione. Con le notazioni adottate nell'esercizio precedente,

$$1 = 1\,(\cos 0 + \imath\, \sin 0),$$
$$\rho = \sqrt[n]{1} = 1,$$
$$\theta_k = \frac{0 + 2k\pi}{3}, \qquad k = 0, 1, 2,$$

per cui i valori distini delle radici si ottengono in corrispondenza dei valori degli argomenti $\theta_0 = 0$, $\theta_1 = \frac{2\pi}{3}$, $\theta_2 = \frac{4\pi}{3}$:

$$\begin{aligned}
z_1 &= 1,\\
z_2 &= \cos\frac{2\pi}{3} + \imath\, \sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \imath\,\frac{\sqrt{3}}{2},\\
z_3 &= \cos\frac{4\pi}{3} + \imath\, \sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \imath\,\frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

La verifica è lasciata al lettore volenteroso. ■

Esercizio. Trovare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^5 = 1 - \imath\,.$$

Risoluzione.

$$\begin{aligned} |1 - \imath\,| &= \sqrt{2}, \\ arg\,(1 - \imath\,) &= \arctan(-1) = \frac{7\pi}{4}, \end{aligned}$$

per cui

$$1 - \imath\, = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + \imath\,\sin\frac{7}{4}\pi\right).$$

Quindi

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt[5]{\sqrt{2}} = \sqrt[10]{2}, \\ \theta_k &= \frac{7\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Esercizio. Scrivere nella forma $x + \imath\,y$ il numero complesso $z = \dfrac{1 + \imath}{1 - \imath}$.

Risoluzione. Scrivendo

$$\begin{aligned} 1 + \imath\, &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \imath\,\sin\frac{\pi}{4}\right), \\ 1 - \imath\, &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + \imath\,\sin\frac{-\pi}{4}\right), \end{aligned}$$

e utilizzando il corollario delle regole del prodotto in forma polare, otteniamo che

$$|z| = 1,$$

e

$$arg\,(z) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Quindi, in forma algebrica,

$$z = \imath\,.$$

Esercizi Proposti

1) *Scrivere i seguenti numeri complessi nella forma* $x + \imath\, y$ *con* $x, y \in \mathbb{R}$*:*

1.1) $(-1+3\imath)^{-1}$;

1.2) $(1+\imath)(1-\imath)$;

1.3) $(1+\imath)(2-\imath)$;

1.4) $(7+\pi\imath)(\pi+\imath)$;

1.5) $(2\imath+1)\pi\imath$;

1.6) $(\imath+1)(\imath-2)(\imath+3)$;

1.7) $1+\imath^3$;

1.8) $\dfrac{1+3\imath}{1+\imath}$;

1.9) $\dfrac{1-2\imath}{1+\imath^3}$.

2) *Scrivere nella forma* $x + \imath\, y$ *l'inverso dei seguenti numeri complessi:*

2.1) $2+\imath$;

2.2) $\dfrac{1}{\imath-1}$;

2.3) $\imath$;

2.4) $\imath^5+\imath+1$.

3) *Trovare il luogo geometrico dei numeri complessi* z *tali che:*

3.1) $|z|=1$;

3.2) $z+\overline{z}=1$;

3.3) $|z|<1$;

3.4) $|z-\imath|\leq 1$;

3.5) $|z-2+\imath|<1$;

3.6) $z\overline{z}=z$;

3.7) $z-|z|=\overline{z}$;

3.8) $|z|^2-2|z|-3=0$;

3.9) $arg\,(z) = \dfrac{\pi}{4}$.

4) *Determinare modulo, argomento e rappresentazione trigonometrica dei numeri complessi*

4.1) $z = \left(6 + \imath\, 6\sqrt{3}\right)^{12}$;

4.2) $\left(\cos\dfrac{\pi}{4} - \imath\,\sin\dfrac{\pi}{4}\right)^{20}$.

5) *Esprimere in forma trigonometrica l'inverso del numero complesso*

5.1) $z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + \imath\,\sin\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\dfrac{1}{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + \imath\,\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

6) *Determinare le soluzioni complesse delle seguenti equazioni:*

6.1) $z^4 = \imath$;

6.2) $z^4 = 1 + \imath$;

6.3) $z^4 = 1$;

6.4) $z^3 = 1 - \imath\sqrt{3}$.

7) *Per ognuno dei seguenti* $z \in \mathbb{C}$ *calcolare* $\overline{z}$, $z\overline{z}$, *e* $1/z$.

7.1) $z = 8 - 3\,\imath$;

[**Sol.** $\overline{z} = 8 + 3\imath$; $z\,\overline{z} = 73$; $z^{-1} = \dfrac{8}{73} + \dfrac{3}{73}\imath$]

7.2) $z = 1 - 9\imath$;

[**Sol.** $\overline{z} = 1 + 9\,\imath$; $z\,\overline{z} = 82$; $z^{-1} = \dfrac{1}{82} + \dfrac{9}{82}\imath$]

7.3) $z = 6 - 7\imath$;

[**Sol.** $\overline{z} = 6 + 7\imath$; $z\,\overline{z} = 85$; $z^{-1} = \dfrac{6}{85} + \dfrac{7}{85}\imath$]

7.4) $z = -5 - 9\imath$;

[**Sol.** $\overline{z} = -5 + 9\imath$; $z\,\overline{z} = 106$; $z^{-1} = -\dfrac{5}{106} + \dfrac{9}{106}\imath$]

7.5) $z = 7 + 6\imath$.

[**Sol.** $\overline{z} = 7 - 6\imath$; $z\,\overline{z} = 85$; $z^{-1} = \dfrac{7}{85} - \dfrac{6}{85}\imath$]

8) *Trovare* $x, y \in \mathbb{R}$ *tali che:*

8.1) $(-5 - 7\imath\,)x + (-1 + 2\imath\,)y = 2 + \dfrac{48}{5}\imath$;

$$\left[\ \textbf{Sol.}\quad x=-\frac{4}{5};\quad y=2\ \right]$$

8.2) $(-4+1\imath)x+(8-5\imath)y=-\dfrac{22}{3}+\dfrac{19}{3}\imath\,;$

$$\left[\ \textbf{Sol.}\quad x=-\frac{7}{6};\quad y=-\frac{3}{2}\ \right]$$

8.3) $(-3-4\imath)x+(2+2\imath)y=-\dfrac{51}{5}-\dfrac{58}{5}\imath\,;$

$$\left[\ \textbf{Sol.}\quad x=\frac{7}{5};\quad y=-3\ \right]$$

8.4) $(9+7\imath)x+(6+8\imath)y=-12-26\imath\,;$

$$\left[\ \textbf{Sol.}\quad x=2;\quad y=-5\ \right]$$

8.5) $(-3+3\imath)x+(-9+1\imath)y=\dfrac{33}{5}-\dfrac{1}{5}\imath\,.$

$$\left[\ \textbf{Sol.}\quad x=\frac{1}{5};\quad y=-\frac{4}{5}\ \right]$$

9) *Dimostrare l'identità*

9.1) $|x+y|^2+|x-y|^2=2\left(|x|^2+|y|^2\right);$

si provi a darne una interpretazione geometrica.

10) *Sia $z\in\mathbb{C}$ tale che $|z|=1$. Per quale valore reale t si ha*

10.1) $z=\overline{z}\left(\dfrac{1+t\imath}{1-t\imath}\right)$, supposto $z\neq\imath$?

10.2) $z=\dfrac{1+t\imath}{1-t\imath}$, supposto $z\neq-1$?

Cosa succederebbe nel primo caso se fosse $z=\imath$ e nel secondo caso se fosse $z=-1$?

11) *Sia dato il numero complesso $z=1+\imath$. Calcolare utilizzando sia la forma algebrica che la forma polare z^n per $n=2,\dots,10$. Quanto vale z^{25}?*

12) *Siano $z,w\in\mathbb{C}$. In quale caso il modulo della somma*

12.1) *è uguale alla somma dei moduli degli addendi?*

12.2) *è uguale al valore assoluto della differenza dei moduli degli addendi?*

13) *Utilizzando la forma polare, determinare $z\in\mathbb{C}$ tale che*

13.1) $|z|-z=1+2\imath\,;$

13.2) $|z| + z = 2 + \imath\,.$

Dopo aver determinato il risultato, si proceda alla verifica.

14) *Sia dato il numero complesso* $z = 1 + \cos\alpha + \imath\,\sin\alpha$*, dove* $\alpha \in \mathbb{R}$*. Calcolare*

14.1) z^n per $n \in \mathbb{N}$;

$\Big[$ **Suggerimento:** applicare la formula di de Moivre $\Big]$

14.2) $|z|$;

14.3) $arg\,(z)$.

15) *Sia* $z \in \mathbb{C}$ *tale che* $z + \dfrac{1}{z} = 2\cos\theta$ *dove* $\theta = arg\,(z)$*; calcolare*

15.1) $z^n + \dfrac{1}{z^n}$;

$\Big[$ **Suggerimento:** applicare la formula di de Moivre $\Big]$

15.2) $|z|$.

16) *Utilizzando la formula di de Moivre, calcolare*

16.1) $\cos\left(\dfrac{2\pi}{11}\right) + \cos\left(3\dfrac{2\pi}{11}\right) + \cos\left(5\dfrac{2\pi}{11}\right) + \cos\left(7\dfrac{2\pi}{11}\right) + \cos\left(9\dfrac{2\pi}{11}\right)$;

$\Big[$ **Sol.** $-\dfrac{1}{2}$ $\Big]$